Niveau(x) d'enseignement : 8 Numéro EDUQ : 9270825
Centre d'intérêt : 841

Charbonneau, Louis.

Une lecture de Viète : Introduction à l'art analytique, Cinq livres des Zététiques / par Louis Charbonneau et Jacques Lefebvre. -- Montréal : Université du Québec à Montréal, Centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage et le développement en éducation, 1991.
72 p. ; 29 cm.

Bibliogr. : p. [71]-72.

Vedette(s)-secondaire(s) : Lefebvre, Jacques • Université du Québec à Montréal. Centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage et le développement en éducation

Descripteur(s) : Mathématiques • Algèbre • Historique • Didactique • Universitaire (Ordre d'enseignement)

Identificateur(s) de nom : Viète, François • Université du Québec à Montréal

Ce document résume certains des échanges d'un groupe de lecture de versions originales de textes mathématiques historiques, groupe qui a pris naissance en 1989 au département de mathématiques et d'informatique de l'UQAM. L'auteur qui a été retenu est François Viète (16e siècle) et le sujet, l'histoire de l'algèbre. Les deux ouvrages qui ont fait l'objet des discussions sont : **Introduction à l'art analytique** et les **Cinq livres des Zététiques**. Le choix et l'étude de textes historiques, en plus de permettre les liens entre l'histoire des mathématiques et la didactique des mathématiques facilite la compréhension, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Type de document :

9270825

CIRADE

CENTRE INTERDISCIPLINAIRE DE RECHERCHES SUR L'APPRENTISSAGE ET LE DÉVELOPPEMENT EN ÉDUCATION

Université du Québec à Montréal

9271825

UNE LECTURE DE VIETE
Introduction à l'art analytique
Cinq livres des zététiques

par
Louis Charbonneau et Jacques Lefebvre
Département de mathématiques et d'informatique

Université du Québec à Montréal
1991

UNE LECTURE DE VIÈTE

INTRODUCTION À L'ART ANALYTIQUE
CINQ LIVRES DES ZÉTÉTIQUES

par
Louis Charbonneau et Jacques Lefebvre
Département de mathématiques et d'informatique

Université du Québec à Montréal
1991

Table des matières

	page
Table des matières	i
Avant-propos	1
Chapitre 1. Le groupe d'étude et son fonctionnement	3
Chapitre 2. *Cinq livres des Zététiques*	7
§1. Un exemple d'un zététique	7
§2. Les séances de lectures	9
Chapitre 3. *Introduction à l'art analytique*	15
§1. Le programme de l'*Introduction à l'art analytique*	15
§2. Analyse et synthèse (chap. I, VI et VII)	18
§3. Égalités et proportions (chap. II)	26
§4. Loi d'homogénéité et genres de grandeurs (chap. III)	30
§5. Logistique spécifique ou calcul algébrique (chap. IV)	36
§6. Les lois du Zététique (chap. V)	44
§7. Puissance de l'Art analytique (chap. VIII)	48
Chapitre 4. Considérations générales	57
§1. La vie des textes	57
§2. Importance historique et originalité de Viète	60
§3. Pertinence pédagogique et didactique de la lecture des textes de Viète	64
Chapitre 5. En guise de conclusion	67
Bibliographie	71

Avant-propos

Une lecture de Viète. En réalité, le présent texte est beaucoup moins que cela, mais aussi un peu plus.

Moins. On ne trouvera pas ici une interprétation étoffée, ni érudite, ni définitive de Viète, pas plus des pages étudiées dans l'*Introduction à l'art analytique* et dans les *Cinq livres des Zététiques* que de l'ensemble de son œuvre.

Un peu plus. On y trouvera, en effet, «des» lectures de Viète. Lectures au sens premier d'acte de lire (collectivement ou individuellement); lectures au sens des diverses versions d'un même texte dans des éditions et traductions au cours des âges; lectures au sens de contacts et d'interrogations de nature parfois historique, souvent conceptuelle, téléologiquement didactique.

L'occasion et le point de départ du présent texte est un ensemble de six rencontres de groupe d'environ deux heures chacune consacrées à la lecture de certaines pages de Viète par, en moyenne, dix personnes (souvent les mêmes) dont l'horizon et l'activité professionnels sont essentiellement ceux de la didactique des mathématiques. On trouvera les détails du fonctionnement du groupe dans le chapitre 1. Les deux auteurs du présent rapport ont très librement complété cette lecture, poussé des pointes ça et là, exploré, interprété, et finalement rédigé les pages qui suivent.

Le présent rapport s'adresse à toute personne intéressée à l'un ou l'autre des aspects suivants:

a) À l'auteur (Viète) ou au sujet (histoire de l'algèbre).

b) À l'approche: lecture en groupe, discussions collectives, etc.

c) Aux liens entre l'histoire des mathématiques et la didactique des mathématiques, et, en particulier, au choix et à l'étude de textes historiques pour la compréhension, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

À ce public, nous offrons cette histoire de cas.

Chacun, bien sûr, fera «sa» lecture du présent rapport. On est invité à sauter ce qui semblera ou trop technique ou trop général, selon le goût et les intérêts de chacun. Les auteurs apprécieront toute remarque ou commentaire qu'on leur fera.

Originaire du Poitou, François Viète[1] poursuivit une brillante carrière de commis de l'Etat. Après l'obtention d'un baccalauréat en droit, il se consacre pendant quelques années à sa profession. Il entre au service d'Antoinette d'Aubeterre dont il devient le conseiller et l'ami. De 1570 à 1584, suite à l'intervention du roi Charles IX, il devient conseiller du parlement de Bretagne à Rennes puis maître de requêtes du parlement à Paris. Tombé en disgrâce, il ne revient à des fonctions officielles qu'en 1589 alors qu'Henry III doit quitter Paris pour se réfugier à Tours. Apprécié d'Henri IV, il continuera à remplir diverses fonctions jusqu'en décembre 1602, deux mois avant sa mort.

Les deux livres que nous avons lus et dont nous parlerons dans les pages qui suivent ne constituent qu'une partie de l'oeuvre mathématique de François Viète, une majorité de ses écrits portant sur l'astronomie et sur des problèmes de géométrie. Ces deux livres furent probablement conçus dans la seconde période de liberté qu'il connut, entre 1584 et 1589. L'*Introduction à l'art analytique* fut publié en 1591 et se veut un véritable programme de fondement de l'algèbre. Les *Cinq livres des Zététiques*, publié deux ans plus tard, se veulent une illustration du potentiel du Zététique, qui est une partie de la nouvelle algèbre. Il est constitué en une suite de problèmes dont plusieurs sont tirés essentiellement des *Livres arithmétiques* de Diophante. Il permet de mettre en relief le nouvel art de Viète en le mettant en regard de celui des Anciens, en particulier Diophante.

Tout au long de notre étude, nous respecterons les **conventions** qui suivent. Les titres des ouvrages seront soulignés et en italique. Par ailleurs les citations, extraits ou mots tirés d'un texte seront écrits en italique. Leur localisation apparaît en note à moins qu'ils ne proviennent d'une version d'un texte de Viète, dans lequel cas nous avons indiqué à sa suite la version impliquée ainsi que les pages. Les versions que nous avons employées sont celles de Vaulézard, Grisard, van Schooten ou Smith (voir à cet égard le chapitre I pour l'identification de ces versions). Si aucune référence n'est indiquée, le contexte permet de repérer précisément d'où vient la citation. Ainsi, les citations et mots français proviennent tous de Vaulézard, à moins d'indication contraire. De même, les citations et mots latins proviennent de la version van Schooten et ceux anglais, de Smith. Parfois, afin d'attirer l'attention du lecteur, certains mots seront écrit en caractères gras. Les caractères gras ne sont jamais utilisés par les auteurs cités. Aussi, même dans une citation, ils sont de nous.

Les auteurs remercient le F.C.A.R. (91-ER-0716) pour son soutien financier. Ils offrent aussi leurs salutations amicales aux membres du groupe d'étude et leurs remerciements aux secrétaires du CIRADE qui ont contribué à rendre lisibles des textes d'une graphie parfois toute personnelle.

---

1 Les quelques informations de ce paragraphe sont tirées de la notice de H.L.L. Busard, dans le *Dictionary of Scientific Biography*.

Chapitre 1
Le groupe d'étude et son fonctionnement

Origine

Au cours de l'année universitaire 1988-1989, Louis Charbonneau et Jacques Lefebvre discutèrent à quelques reprises des moyens d'assurer une plus grande pénétration des préoccupations historiques dans l'enseignement des mathématiques à l'U.Q.A.M. Ils visaient, en particulier, à susciter des échanges et des communications fréquentes et suivies entre collègues sur des questions ou textes historiques. Ils furent à même d'apprendre l'existence et d'apprécier le fonctionnement de groupes de lecture de versions originales de textes mathématiques historiques créés par certaines équipes consacrées à l'épistémologie et à l'histoire des mathématiques (E. Barbin. *Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques*, p. 5) dans les I.R.E.M. de France (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques). Ils décidèrent de faire part de cette idée (lire des textes ensemble) à certains collègues. Si elle était retenue, cette formule n'exclurait pas d'autres modes d'information, mais elle aurait l'avantage de porter essentiellement sur la matière historique première, voire brute, et de ne pas exiger de connaissances préalables bien spécifiques. Ils décidèrent aussi de limiter les invitations aux seuls membres du département (plus de 80 personnes) de façon à rester, pour ainsi dire, en famille, à garder au groupe une taille modeste, à expérimenter la formule avant de l'étendre. Il est à noter que les groupes similaires des I.R.E.M. semblent majoritairement compris d'enseignants des Lycées, provenant de disciplines intellectuelles et scolaires assez variées (mathématiques, philosophie, physique, lettres...).

Formation et composition

Un mémo fut envoyé à tous les professeurs du département de mathématiques et d'informatique de l'U.Q.A.M. le 10 octobre 1989. On prévoyait alors deux rencontres à l'automne et quatre rencontres entre le premier janvier 1990 et le premier mai 1990. Il y eut, en effet, six rencontres, du 13 novembre 1989 au 10 mai 1990.

Quinze professeurs firent connaître leur intérêt pour des séances de lecture de (Viète et de Descartes) aux initiateurs, Louis Charbonneau et Jacques Lefebvre. Les multiples conflits d'horaire obligèrent tout au long de l'année à des consultations, des rajustements et, à l'occasion, des absences ou désistements. Les deux premières rencontres furent dédoublées, de façon à accommoder certaines personnes. Au cours de la session d'hiver,

on convint de ne tenir les réunions qu'une fois, un moment (presque) optimal ayant été trouvé. Un étudiant de niveau doctoral vint une fois et une étudiante de niveau doctoral vint aux trois dernières rencontres (s'ils n'étaient pas désireux de faire de la publicité pour les rencontres, les organisateurs n'avaient pas l'intention de refuser de telles participations et accueillèrent avec plaisir ces étudiants).

Au total, dix-sept personnes assistèrent à au moins une rencontre, pour un total de cinquante-six présences (moyenne de 3,29 présences par personne). Le tableau 1 donne la distribution du nombre de personnes en fonction du nombre de réunions auxquelles elles ont assisté. Le tableau 2 donne le nombre de présences pour chacune des réunions (moyenne de 9,3 présences par réunion, ce qui, pour les organisateurs, est un bon ordre de grandeur).

Tableau 1

Nombre de réunions	6	5	4	3	2	1
Nombre de personnes	4	2	2	1	3	5

Tableau 2

Numéro de la réunion	1	2	3	4	5	6
Nombre de présences	9	12	6	10	10	9

Il est à noter que quelques personnes ont exprimé leur grand intérêt pour les réunions mais n'ont pu assister qu'à peu d'entre elles à cause de conflits d'horaires. Il est aussi utile de signaler que la très grande majorité des participants étaient membres de la section didactique du département. Un membre de la section mathématiques fondamentales vint à deux rencontres, un membre de la section informatique vint à une rencontre.

Choix des ouvrages

Compte tenu de l'intérêt qu'ils savaient présent chez plusieurs de leurs collègues de la section didactique relativement à l'enseignement de l'algèbre, les organisateurs choisirent de faire porter les premières lectures sur des textes de Viète et de Descartes. En fait, la richesse, la complexité et l'étrangeté des zététiques tirés des *Cinq livres des Zététiques* lus lors de la première rencontre amenèrent le groupe à reporter à plus tard l'abord de Descartes. Il devait s'avérer que trois réunions ont porté sur des zététiques et trois sur l'*Introduction à l'art analytique* du même Viète.

(I) *Cinq livres des Zététiques*

Les organisateurs distribuèrent des copies de certains zététiques choisis par eux parmi les *Cinq livres des Zététiques* dans une traduction de J. Grisard, dans sa thèse (inédite) *François Viète, mathématicien de la fin du seizième siècle*, EPHE, VIe Section, Paris, 1969 (exemplaire du Centre Alexandre Koyré, th 17).

On pouvait aussi consulter, durant les réunions, la traduction de Vaulézard (1630), rééditée en 1986, chez Fayard, sous le titre *La nouvelle Algèbre de M. Viète précédée de Introduction en l'art analytique*. La version latine éditée par F. van Schooten (1646) était disponible dans la réédition de 1970 des *Opera Mathematica* de François Viète, chez Georg Olms Verlag. On sait que les *Cinq livres des Zététiques* sont parus en latin vers 1593. Grisard (note 1, p. 199) nous avertit que le texte original de Viète diffère en certains points de l'édition van Schooten.

Ont été lus et commentés les zététiques suivants:

Livre premier: zététiques 1, 2, 4, 5, 8
Livre second: zététiques 1, 2, 3, 16, 17, 18, 19
Livre troisième: zététiques 1, 2, 13

En dépit de certains archaïsmes, la traduction de Vaulézard présentait pour plusieurs participants des avantages de plus grande fidélité à la pensée «géométrique» de l'époque où le texte de Viète fut rédigé. Les figures et constructions «géométriques» de Vaulézard permettaient de voir à l'oeuvre des préoccupations didactiques (en particulier dans les notes et les scolies, nous semble-t-il maintenant) et épistémologiques (par exemple, dans les *exégétiques en lignes*). Le soin de ce traducteur l'a poussé à refaire (et à corriger, le cas échéant) les exemples numériques (tout en ajoutant des coquilles d'imprimeur).

(II) *Introduction à l'art analytique*

Les participants avaient chacun un exemplaire de la traduction de Vaulézard (1630) dans la réédition de 1986 et un exemplaire de la traduction en anglais faite par J. Winfree Smith (1955), reproduite dans la version M.I.T. Press (1968) du *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra* de Jacob Klein (paru en allemand, 1934-1936). On pouvait aussi consulter l'édition latine de van Schooten. La version française fut le texte de base, mais l'on constata rapidement que la version anglaise était plus concise et souvent plus fidèle à la version de van Schooten. Les quatre premiers chapitres furent lus partiellement et commentés, ainsi que, brièvement, les chapitres six et sept.

Déroulement des séances

Une période de lecture individuelle (en principe silencieuse) sur place, d'environ 5-10 minutes, sur une courte section d'un texte (au plus quelques pages) était suivie de commentaires, questions, essais d'explication, etc. Les organisateurs remplissaient des fonctions d'animateurs, mais non de conférenciers, arbitres, ou experts. Le **principe de base** était de faire une lecture et une discussion des matériaux historiques primaires (non influencées par un conditionnement immédiat): **lire et discuter.**

De nombreuses questions ne recevaient pas de réponse immédiatement, mais l'on passait à une autre section du texte lorsque l'on voyait que, dans les circonstances, on ne semblait pas pouvoir avoir plus d'éclairage, voire de certitude, ou lorsque tout semblait bien compris. Une suggestion fut émise lors de la discussion sur le fonctionnement du groupe à la fin de la dernière réunion: charger régulièrement des personnes pour faire des mini recherches, peut-être essentiellement chronologiques ou terminologiques, sur certaines questions laissées sans réponse. On tient cependant à éviter de transformer les réunions en conférences. Une autre suggestion, venant des deux organisateurs, porta sur la rédaction d'un texte ou rapport technique pour résumer (et développer, le cas échéant) certains des échanges auxquelles donnèrent lieu les réunions: le présent écrit en est l'actualisation.

Globalement, les participants considèrent la formule de lecture et de discussion comme pertinente et agréable. Il fut convenu de continuer en 1990-1991: *La Géométrie* de Descartes (1637) sera à l'étude (cette fois-ci, on pourra lire l'original en français!).

Chapitre 2
Cinq livres des Zététiques

Rapellons que le livre *Zeteticorum libri quinque* (*Cinq livres des Zététiques*) fut terminé en 1591, mais publié en latin en 1593. Il est constitué de séries de problèmes, appelés par Viète *Zeteticum*, en français zététique. Plusieurs de ces problèmes apparaissent déjà dans les *Livres arithmétiques* de Diophante (c. 300 A.D.).

§1. Un exemple d'un zététique

Afin de donner une idée plus exacte du contenu et de la forme que prennent ces zététiques, nous reproduisons intégralement ici le zététique I-2 (premier livre, deuxième zététique) dans la traduction de Grisard (p. 196), sans les notes. Nous reproduisons exactement le texte de Grisard, en délaissant pour un moment notre convention relative aux caractères italiques.

> Étant donnée la différence de deux grandeurs, et donnée aussi leur quotient trouver les grandeurs.
>
> Soit donnée B la différence des grandeurs, et donné aussi le rapport de la plus petite à la plus grande, comme R à S. Il faut trouver les grandeurs.
> Soit A la plus petite, la plus grande sera donc A + B, c'est pourquoi A est à A + B comme R à S. Ce qui, résolu l'analogisme, donne SA = RA + RB et, par translation sous l'affection contraire: SA - RA = RB; et divisant tout par S - R on a:
>
> $$\frac{RB}{S - R} = A$$. D'où S - R est à R comme B à A.
>
> Ou bien: soit la plus grande E, donc la plus petite sera E - B, c'est pourquoi E est à E - B comme S à R. Ce qui donne, l'analogisme étant résolu, RE = SE - SB. Et par la translation correcte SE - RE = SB. D'où S - R est à S comme B à E.

Étant donc donnée la différence de deux grandeurs et leur quotient, on trouve les grandeurs; en effet:

> *"La différence des deux grandeurs semblables est à la plus grande (la plus petite) des grandeurs semblables comme la différence des vraies grandeurs est à la plus grande de ces vraies grandeurs (la plus petite)."*

Soit B 12, R 2, S 3; on aura A = 24 et E = 36

La forme de ce zététique correspond à celle de tous les autres zététiques du livre: 1) énoncé du problème en des termes généraux; 2) résolution du problème qui parfois, comme ici, est faite de diverses façons; 3) énoncé final mis en évidence par le choix des caractères italiques (comme dans la version latine originale ou la version van Schooten) et qui décrit en mots l'équation ou la proportion caractérisant l'inconnue; 4) enfin, un exemple numérique.

En langage moderne, on pourrait «traduire» ce zététique ainsi tout en conservant les symboles de Viète:

Soit B = E - A et soit E/B = S/R. Trouver E et A en fonction de B, R et S.

On a E = A + B, donc A/(A+B) = R/S.On a, en multipliant les extrêmes et les moyens (*résolu l'analogisme*), SA = RA + RB et, en «envoyant de l'autre côté» RA (*translation sous l'affection contraire*), on obtient SA - RA = RB. Divisant par S-R, on a: $\frac{RB}{S-R} = A$. D'où (S-R)/R = B/A.

Ou bien. On a A = E - B, donc E/(E-B) = S/R. On a, en multipliant les extrêmes et les moyens, RE = SE - SB, dont on tire SE - RE = SB. D'où (S-R)/S = B/E.

L'énoncé final, en italique,[1] décrit la proportion aboutissement du processus de résolution. Pour y voir clair, il suffit de remarquer que les grandeurs *semblables* sont celles caractérisant le rapport des inconnues, autrement dit R et S. Nous verrons dans le prochain chapitre que le but recherché par Viète n'est pas dans ce livre de résoudre complètement les problèmes mais plutôt d'en arriver à caractériser une des inconnues par une équation ou une proportion sous une forme canonique, qu'il qualifie d'*ordonnée*. Dans le cas du présent zététique, cette forme fournit immédiatement la valeur de l'inconnue.

1 Vaulizard nomme cet énoncé *théorème*.

Toutefois, dans d'autres problèmes, il peut arriver qu'il n'en soit pas ainsi, comme lorsque l'équation finale est une équation quadratique, par exemple.

La formulation en termes modernes nous porte à poser un certain nombre de questions ou commentaires sur la logique interne du mode de présentation de Viète. Ainsi, pourquoi Viète se donne-t-il la peine de refaire son raisonnement en partant de la grandeur cherchée la plus grande alors qu'il vient tout juste de trouver la grandeur la plus petite ? De même, contrairement à notre habitude actuelle, dans son zététique I-2, Viète présente sa solution sous le forme d'une proportion et non d'une équation. Ces questions et commentaires, et d'autres, font l'objet de la prochaine section.

§2. Les séances de lecture

Les participants aux trois séances de lecture de certains zététiques étaient presque tous des novices absolus en ce qui a trait au texte des oeuvres mêmes de Viète. Il n'est pas sans intérêt de regrouper et de résumer un certain nombre de leurs réactions et propos.

(I) On constata, dès le zététique I-1, le **caractère géométrique** du langage de Viète. Le traducteur Grisard (1969) utilise *grandeur* comme terme général, mais signale que Viète employait *latus* (côté) et parle de *l'optique géométrique, qui exprime son but de généralisation* (note 1, p. 195). Grisard remarque aussi que le terme de grandeur est employé par Vaulézard (1630) dans un scolie. Une rapide vérification dans l'exemplaire de la traduction de Vaulézard confirma le caractère habituellement géométrique de cette vieille traduction (*costé*, *rectangle* (pour produit), ...). Une allusion fut faite par un des membres du groupe au livre V des *Éléments* d'Euclide, où grandeur est un terme plus général que nombre ou que grandeur géométrique. Mais le groupe resta avec cette impression dominante d'un langage géométrique comme clef interprétative des schèmes de représentation chez Viète.

(II) Attendu cet arrière-fond géométrique, le groupe s'étonna de l'**absence de figures** ou d'illustrations. On n'en trouve qu'à partir du chapitre 4 dans l'édition de van Schooten (pp. 64 ss). Vaulézard en donne régulièrement dès les tout premiers zététiques, parfois sous l'appellation *Exégétique en lignes* ou plus simplement *en lignes* ce qui semble indiquer un souci de présenter en un langage plus usuel (donc géométrique) pour le lecteur de 1630 ce que le novateur Viète «voyait» sans avoir besoin de le dessiner. Des membres du groupe considéraient ces *En lignes* de Vaulézard comme plus que des illustrations, car il s'agit parfois d'un mode d'attaque et d'un type de résolution du problème différents de ceux employés par Viète.

(III) Le langage et le raisonnement à l'aide de **proportions** apparurent rapidement au groupe comme très fréquents et importants chez Viète. Dès le zététique I-2, des recherches se terminent sur un énoncé de type proportionnel, alors que l'on procéderait aujourd'hui comme Viète l'avait fait dans le zététique I-1 et dans la première recherche du zététique I-2, c'est-à-dire par un énoncé de type fonctionnel, l'inconnue étant isolée d'un côté d'une équation, dont le second côté (ou membre) est une expression algébrique des données connues: $A = \frac{RB}{S - R}$. L'analyse aussi (c'est-à-dire la recherche de la forme canonique) se fait souvent à l'aide de proportions.

L'équivalence entre les proportions et les équations fut donc perçue directement, à l'occasion de l'étude et du traitement de problèmes spécifiques. De fait, il s'agit là d'une clef capitale pour pénétrer la pensée de Viète. À cet égard, les *symboles* ou principes 15 et 16 du chapitre II de l'*Introduction à l'art analytique* sont très clairs. Mais le groupe n'avait pas encore lu ce «programme» et cette méthode qu'est l'*Introduction à l'art analytique* et, le temps venu, il passa rapidement, à la fin d'une séance, sur le chapitre II, sans prendre note de la reconnaissance explicite et soulignée par Viète de l'équivalence des langages (la proportion étant dite *constitution des égalités: Égalité résolution de la proportion* (Vaulézard, p. 21)). Dans le présent texte, nous soutiendrons même qu'il s'agit sans doute là, pour Viète, du plus important des "symboles" ou principes énoncés dans ce chapitre (Viète emploie le terme grec "Κυριον", mais les traductions ne l'appliquent pas tous aux mêmes *symboles*), (voir chapitre 3, section 3, p. 28).

(IV) Dès le Zététique I-1, on nota un **dédoublement apparemment inutile** dans le travail de recherche d'une solution. La somme et la différence de deux grandeurs étant connues, on demande à trouver ces grandeurs. Pourquoi, une fois trouvée la plus petite, ne pas calculer la plus grande par complémentarité, plutôt que de refaire un travail d'analyse tout à fait analogue, pour cette grandeur, à celui effectué pour la plus petite? Viète fait la transition entre les deux parties par un simple *vel* (van Schooten, p. 42), ce que Grisard traduit par un *ou bien* (Grisard, p. 195). On verra plus loin des hypothèses circonstanciées de réponse à cette question pour ce zététique et aussi de façon peut-être assez générale. Si l'on en reste au niveau purement descriptif, on constate **passim** ce type de redondance (zététiques I-2, I-3, I-4, etc.). Qui plus est, des approches et des solutions différentes à un même problème sont présentées avec un simple *Autrement* (*Aliter* chez Viète) comme liaison ou transition (zététique I-4, par exemple). Une troisième forme d'apparente redondance consiste à consacrer deux zététiques au même problème (zététique II-17 et II-19, par exemple). La lecture plus systématique de la traduction de Vaulézard (les membres du groupe n'avaient qu'un exemplaire de ce livre à leur disposition) aurait certes amplifié ce sentiment d'étonnement face à une prolifération d'approches, puisque Vaulézard explicite, ajoute des figures, apporte une nouvelle argumentation, etc.

(V) Un constat apparenté au précédent a trait à la **variété des formes** employées par Viète **pour exprimer les solutions** aux problèmes traités dans tel ou tel zététique. Par exemple, dans le zététique I-1, on trouve, non numérotées, quatre façons d'exprimer la plus petite des grandeurs notée A, en fonction des données (nous distinguons et isolons ces quatre façons):

(a) $SA - RA = RB$

(b) $\frac{RB}{S - R} = A$

(c) *$S - R$ est à R comme B à A*

(d) *La différence des deux grandeurs semblables est à la plus petite des grandeurs semblables comme la différence des vraies grandeurs est à la plus petite de ces vraies grandeurs.*

La traduction de Grisard (p. 196) est très fidèle à la version latine de l'édition de van Schooten (p. 42). Outre l'apprivoisement nécessaire de la notion de grandeurs semblables (R et S, comme représentant le rapport des deux grandeurs à trouver), on note la grande différence stylistique de ces quatre formulations. Dans le même zététique, la plus grande des grandeurs, notée E, ne sera donnée que sous les formes équivalentes à (a), (c) et (d), et c'est, remarquablement, la forme que nous, modernes, privilégierions, à savoir:

(b') $\frac{SB}{S - B} = E$

qui est omise. On rejoint ici ce qui a déjà été dit quant au langage des proportions en (III). On retrouve cette multiplicité de formules ou d'expressions dans d'autres zététiques, par exemple le zététique I-8, où l'on cherche une grandeur notée A, que Grisard donne (sans numérotation) sous les formes suivantes:

(a") $\frac{BA}{D} + \left| \frac{BA}{-\frac{BH}{F}} \right| = B$

(b") $\left| \frac{DF}{+\frac{DH}{D+F}} \right| = A$

(c") *$D + F$ est à $F + H$ comme D est à A*

(d") *Les portions semblables contribuées tant par la première que la seconde partie sont à la différence prescrite augmentée de la portion semblable contribuée par la seconde partie comme la portion semblable contribuée par la première partie à la vraie portion contribuée par cette première partie.*

La lecture de la formulation (d") amena quelques lecteurs à se réjouir de l'usage aujourd'hui répandu, voire systématique, de formules algébriques symboliques en lieu et place de longues phrases écrites en mots. Bref, il y eut presque un «Vive l'algèbre!», qui n'eut certes pas été déplacé ni irrespectueux.

(VI) On constata vite l'**habileté technique** de Viète, notamment dans l'évocation et la transformation de proportions et aussi dans la maîtrise d'identités algébriques reposant sur le développement du binôme du deuxième ou du troisième degré. Ces identités ne sont parfois pas explicitement données, parfois elles le sont (la lecture d'un choix de zététiques non consécutifs empêchait de juger du niveau de complétude ou d'autosuffisance du texte). On en trouve une, par exemple, au zététique II-3:

> *Le carré de la différence des grandeurs ajouté à quatre fois leur produit est égal au carré de leur somme* (Grisard, p. 216).

Et Viète se sert du binôme du troisième degré, non explicitement, pour trouver dans le zététique II-17 que

$$(E + B)^3 - (E - B)^3 = 6BE^2 + 2B^3$$ (Voir Grisard, p. 224).

(VII) Les particularités du **vocabulaire** de Viète (même en traduction) sautent au yeux du lecteur moderne: *antithèse* (p. 195), *résolu l'analogisme* (p. 196), *translation sous l'affection contraire* (p. 196), *adplicare ad* (p. 199), *révoqué à l'analogisme* (p. 215), *moyenne de trois lignes* (continuellement) *proportionnelles* (p. 231), etc., (les références aux pages renvoient à la traduction de Grisard).

(VIII) Les **notations** furent plus aisément apprivoisées, d'autant que Grisard emploie les notations modernes (*AB* au lieu de *A in B* pour un produit; = au lieu de *aequabitur* pour une égalité, etc.). On s'habitua aux voyelles pour les inconnues et aux consonnes pour ce que nous appellerions les paramètres. Deux notations furent commentées plus particulièrement; elles se retrouvent passim mais on les rencontre toutes deux dans un même passage (Grisard, p. 199):

$$\left| \begin{array}{c} SB \\ \overline{\equiv} \; RD \\ \overline{S \equiv R} \end{array} \right| = A$$

Les barres verticales, d'une part, semblent jouer le rôle de régulation de l'ordre des opérations afin d'éviter l'ambiguité (cette notation provient, dit Grisard, de *la mise en page de Viète, qui ne se retrouve pas dans l'édition de Schooten (1646), ni dans les traductions de 1630* (Grisard, p. 199)). La notation =, d'autre part, invite le lecteur à effectuer une

soustraction en prenant soin de prendre d'abord le plus grand des termes et à en soustraire le plus petit. C'est une sorte de «valeur absolue» de la différence. Viète utilise le signe ≍ (en fait un = allongé) pour cette mise en valeur absolue de la différence, ou cette mise en ordre correct pour éviter un résultat négatif (les grandeurs ne pouvant être négatives, dirions-nous). Grisard doit recourir à un autre notation (et il prend ≠) puisque = signifie, pour lui comme pour nous, l'égalité.

(IX) Les membres du groupe furent sensibles à la **concision pédagogique croissante** au fur et à mesure de l'avancement dans l'ordre de présentation des zététiques. Les détails techniques, les raccords et les références à la teneur de zététiques antérieurs deviennent de plus en plus rares. Donnons trois exemples. Dans le zététiques I-1 (*Étant donnés la différence de deux grandeurs et leur somme, trouver les deux grandeurs.* (Grisard, p. 195)), Viète trouve (indépendamment et successivement) la plus petite et la plus grande de ces grandeurs et donne diverses formulations des solutions. Dans le zététique II-3 (*Étant donnés le produit de deux grandeurs et leur différence, on trouve les grandeurs* (Grisard, p. 216)), il se sert d'une identité tirée de la formule du binôme du second degré et en arrive à ce que *Et ayant la somme et la différence des deux grandeurs, on a les grandeurs* (Grisard, p. 216), ce qui est se servir du zététique I-1 (sans identification des numéros des zététiques, cependant). Enfin, citons intégralement la traduction de Grisard du zététique II-16, particulièrement concis:

> Étant donnée la somme des cubes de deux grandeurs et le produit de ces grandeurs, on trouve les grandeurs. En effet:
> *Le carré de la somme des cubes moins quatre fois le cube du produit, est égal au carré de la différence des cubes.*
> Comme on peut de nouveau le déduire par antithèse de ce qui a déjà été répété (Grisard, p. 224).

Dans ce dernier exemple, Viète énonce ce que nous écririons sous la forme $(a^3 + b^3)^2 - 4(ab)^3 = (a^3 - b^3)^2$. Puisque $a^3 + b^3$ et ab sont connus, le membre de gauche est donc connu, et l'on obtient le membre de droite. Par extraction de la racine carrée, on obtient $a^3 - b^3$. Et puisque $a^3 + b^3$ est connu, on se sert du zététique I-1 (somme et différence connues), pour obtenir a^3 et b^3. Et par extraction des racines cubiques, l'on obtient a et b (ce qui était demandé). Viète ne donne aucune des étapes que nous venons de décrire.

L'impression des membres du groupe fut confirmée par la note 1 de Grisard, lors de la lecture du zététique III-1: (...) *il est remarquable que le style d'expression de Viète se modifie dans le livre: il est ici plus dépouillé, et se contente de renvoyer brièvement au travail déjà fait alors qu'au début de l'ouvrage, il détaillait des évidences* (...) (Grisard, p. 231).

En cours de lecture ou de discussion, de nombreuses questions ponctuelles furent soulevées et souvent laissées (provisoirement ou définitivement) sans réponse. Pour mémoire, signalons-en quelques-unes:

1) D'où vient le terme "adplicare ad"?
2) Qui utilisa le premier des lettres pour désigner des variables?
3) Qui utilisa le premier la barre horizontale pour signifier une division?
4) Comment trouvait-on les racines cubiques du temps de Viète?

etc.

Chapitre 3
Introduction à l'art analytique

§1. Le programme tracé dans l'*Introduction à l'art analytique*

Présentation générale

L'ouvrage le plus important de François Viète est sans contredit *In artem analyticen Isagoge* (*Introduction à l'art analytique*) publié à Tours en 1591. Il se voulait une partie d'une oeuvre beaucoup plus vaste ayant pour titre *Opus restitutæ Mathematicæ Analyseos seu Algebra nova*. Ce grand traité devait contenir neuf livres dont seulement deux ont vraiment été publiés: *Supplementum geometriæ* (1593) et *De numerosa potestatum ad Exegesin Resolutionæ* (1600). Il se peut que le *Zeteticorum libri quinque* (1593) soit un de ces livres sous une forme légèrement différente de celle originellement prévue.[1] Ces livres devaient exemplifier les différentes parties et techniques de cette nouvelle analyse dont les principales caractéristiques sont présentée dans le *In artem analyticen Isagoge*.

Une nouvelle édition de l'*...Isagoge* est contenue dans le *Francisci Vietæ Opera Mathematica* de van Schooten paru en 1646. Par ailleurs, il a connu plusieurs traductions. En anglais, il y celle de J. W. Smith faite en 1955 et que nous avons employée dans le groupe de lecture. En français, en plus de celle de J.L. de Vaulézard publiée en 1630 que nous avons aussi fréquentée, il y a celle de A. Vasset publiée la même année que celle de Vaulézard et une autre plus récente de F. Ritter publiée en 1868 (Voir la bibliographie).

Introduction à l'art analytique

Pour un livre aussi important dans l'histoire des mathématiques, le *In artem analyticen Isagoge* contient fort peu de pages. Dans l'édition van Schooten, 12 pages lui suffisent. C'est dire la concision du texte. Viète ne perd pas de temps dans des explicitations. Les choses y sont dites une fois. Au lecteur de lire parfois entre les lignes. Il ne faut pas alors se surprendre des longs commentaires que Vaulézard (sa version a 51 pages) a souvent ajoutés au texte de Viète.

---

[1] Voir Klein, J., p. 153 et note 210, p. 258. Busard, dans sa note sur Viète dans le DSB, t. XII, p. 20 indique que le contenu du livre *Effectionum geometricarum canonica recensio* a été annoncé dans le dernier chapitre de l'*Isagoge*... Voir aussi les notes 58, 59 et 60 de Smith, pp. 351-352. Frédérick Ritter (1895, pp. 373-374) parle plutôt de 10 parties dont cinq auraient été pulbiées du vivant de Viète.

Le livre se divise en 8 chapitres précédés d'une épître dédicatoire. Le **premier chapitre** place le programme que se donne Viète en regard de la synthèse et de l'analyse des Anciens. Il y annonce fondamentalement deux nouveautés. Aux deux parties de l'analyse que l'on retrouve chez les Anciens, le Zététique et le Poristique, il ajoute une nouvelle analytique qu'il nomme Exégétique ou Rhétique. De plus, il annonce que son analyse repose sur la logistique sous les espèces, *nouvellement trouvée* contrairement au Anciens dont l'analyse reposait sur la logistique par les nombres. Viète est donc conscient de l'importance de sa nouvelle algèbre. Dès le départ, il situe le livre au niveau d'une discussion méthodologique, annonçant clairement la généralité de ses applications.

Le **chapitre II** rattache plus spécifiquement cette nouvelle algèbre aux mathématiques des Anciens, et plus particulièrement à la théorie des proportions d'Euclide. Après avoir rappelé certaines des notions communes des *Éléments* d'Euclide, il présente les opérations que l'on peut faire sur une proportion et qui la transforment en une nouvelle proportion. Il termine en affirmant l'équivalence d'une proportion et de l'égalité issue du produit des extrêmes et des moyens. Viète a ainsi ouvert la porte à la justification et à la manipulation des égalités en lieu et place des proportions. Un premier pas important est ainsi franchi vers la mise en place de l'algèbre moderne.

Il y a toutefois un prix à payer pour étendre la richesse et la généralité de la théorie des proportions à l'usage des équations. Ce prix, l'exigence de l'homogénéité des équations, fait l'objet du **chapitre III**. Viète y présente deux nomenclatures permettant de bien identifier la dimension de chaque grandeur apparaissant dans une équation. D'une part, les grandeurs dites scalaires (*magnitudinum scalarium*) proviennent de l'ascension d'une grandeur d'une dimension à une autre, il se sert des termes *latus* ou *radix*, *quadratum*, ... ce que nous écririons a, a^2, a^3, etc. D'autre part, pour les grandeurs ayant en soi une dimension, dites les grandeurs comparées (*magnitudinum comparatatum*), il parle de *longitudo* ou *latitudo*, *planum*, ... Un vocabulaire doit aussi être développé qui caractérise la nature de chaque monôme dans une équation (le terme «monôme» n'apparaît pas chez Viète).

Ayant ainsi établi la primauté de la loi des homogènes, Viète en vient dans son **chapitre IV** au coeur de sa nouvelle méthode: la logistique spécifique. Il y présente les 4 préceptes (*Præceptum*) à la base de cette logistique, en fait nous dirions plus simplement les quatre opérations élémentaires sur les expressions symboliques. Il introduit donc le lecteur à la notation de chacune de ces opérations et aux principales règles de calcul les concernant. Il va sans dire que ces règles sont tributaires de la loi des homogènes.

Tout est prêt maintenant pour aborder le coeur de l'entreprise: l'analyse et plus précisément le Zététique. L'objet du Zététique, explicité dans le **chapitre V**, est d'exprimer par une équation ayant une forme canonique les relations entre les diverses grandeurs d'un problème, toutes connues sauf une, inconnue. En langage moderne, nous écrivons cette équation, qualifiée par Viète d'*ordonnée*, sous la forme $x^kQ(x) = CD$ où $Q(x)$ est un polynôme en x ou encore une grandeur connue, k est un nombre entier supérieur ou égal à 1 et C et D sont composées uniquement de grandeurs connues. Ainsi elle peut se transformer en une proportion $x^k : C :: D : Q(x)$. Evidemment, pour être ainsi transformable, cette équation doit respecter la loi des homogènes. Pour obtenir cette équation ordonnée, il faut éventuellement utiliser trois transformations qui conservent l'égalité: l'*antithèse* (le déplacement d'un monôme d'un côté à l'autre de l'équation), l'*hypobibasme* (la division de chaque membre de l'équation par l'inconnue à une certaine puissance), le *parabolisme* (la division de chaque membre de l'équation par une grandeur connue). **Le but du Zététique n'est donc pas la résolution complète d'un problème mais plutôt sa mise en équation et la transformation de cette équation en une forme canonique.**

Les **chapitre VI** et **chapitre VII**, très courts, traitent très succintement de ce qu'il y a à faire lorsque l'équation a été obtenue. D'une part (chap. VI), ce résultat, aboutissement du Zététique, peut faire l'objet d'une preuve synthétique par l'inversion des étapes suivies dans le Zététique. Toutefois, si l'inversion du cheminement analytique n'est pas automatique, une attention particulière devra être apportée à certains passages délicats du cheminement. C'est là la fonction du Poristique. Par ailleurs (chap. VII), dans le cadre d'un problème, il faut continuer la quête de la valeur précise de l'inconnue. Cette quête, objet de l'Exégétique, troisième partie de l'analyse, prend une forme propre à la nature du problème traité, soit numérique, soit géométrique.

Le **chapitre VIII** donne quelques compléments sur la nature des équations, mais surtout il fait part de quelques problèmes particuliers qui ont baissé l'échine sous l'action de cette nouvelle algèbre: l'approximation des racines des équations numériques, la trisection des angles, le problème du mésographe. Ainsi, tout espoir est permis. Il n'est plus exagéré de dire: *Nullum non problema solvere*.

Avant d'entrer plus avant dans le détail de chacun de ces chapitres, signalons la variété des termes employés par Viète (suivi en cela, par ses traducteurs) dans les titres de ses chapitres:

Chapitre	Viète	Vaulézard	Smith
II	*Symbolis*	*Symbole*	*Stipulations (symbola)*
III	*Lege*	*Loy*	*Law*
IV	*Praeceptis*	*Precepts*	*Precepts*
V	*Legibus*	*Loix*	*Laws*
VI	*Examinatione*	*Examen*	*Investigation*
VII	*Officio*	*Office*	*Function*
VIII	*Notatio*	*Note*	*Symbolisme*

Ces différents termes nous paraissent des indicatifs de la place relatives des diverses composante de la nouvelle algèbre les unes par rapport aux autres. Nous en reparlerons à l'occasion.

§2. Analyse et synthèse (chap. I, VI et VII)

2.1 Impressions et commentaires principaux lors de la séance de lecture

Dès la première réunion en octobre, c'est-à-dire dès le début de notre lecture des *Cinq livres des Zététiques*, la question du sens à donner à ce mot *Zététique* s'était posée. Nous nous sommes tout de suite référés au premier chapitre de l'*Introduction à l'art analytique*, chapitre ayant pour titre dans l'édition de Vaulézard *De la définition et division de l'Analytique, et des choses aydans au Zététique*, et dans lequel il est dit que l'analyse se divise en trois parties: le Zététique, le Poristique et enfin le Rhétique ou Exégétique. Sans vraiment regarder de plus près nous avions alors conclu, mais sous toute réserve, que le Zététique correspondait à la mise en équation, que le Poristique consistait à chercher la vérité d'un théorème, par opposition à la résolution d'un problème, et que l'Exégétique consistait à trouver la ou les solutions d'un problème. L'un d'entre nous fit alors remarquer qu'il avait souvenir d'avoir vu le terme Zététique associé à la recherche plus ou moins empirique, par Képler, de la forme des orbites des planètes. Il notait aussi qu'il croyait que, toujours en relation avec Képler, Poristique se référait à la détermination sous forme algébrique des liens de causes à effet. Nous n'avons pu vérifier ces dires.

La rencontre où la question de la définition d'analyse et de synthèse, ainsi que des trois types d'analyse, a été abordée plus systématiquement eut lieu le 1er mars 1990 avec le début de la lecture de l'*Introduction à l'art analytique* dans la version de Vaulézard. Dans un premier temps, la lecture des définitions données par Viète des trois parties de l'analyse nous laisse croire que le Zététique correspond à la mise en équation du problème car il y est

dit de trouver l'*égalité ou proportion de la grandeur requise, avec celles qui sont données*. Le Poristique nous laisse perplexe. Le Rhétique ou Exégétique (pourquoi y a-t-il deux mots pour une même chose ?) est probablement la détermination de la valeur de l'inconnue, d'un côté de l'équation, en fonction des données amalgamées de l'autre côté de l'équation, le terme *ordonnée* voulant sans doute dire que l'équation a cette forme. La lecture des notes de Vaulézard nourrit toutefois une discussion au cours de laquelle d'autres interprétations surgissent. Ainsi, on mentionne que le Zététique semble correspondre en partie à une classification des problèmes, comme le laisse croire le début du chapitre V de l'*Introduction à l'art analytique*. Notre discussion se termine sans consensus sur une interprétation. Nous espérons que la lecture des chapitres V, VI et VII qui traitent de chacune des partie de l'analyse nous éclairera quelque peu. Voici néanmoins l'interprétation qui semble avoir été retenue par la majorité:

Zététique Mise en équation du problème et manipulation de cette équation de façon à arriver à isoler l'inconnue.

Poristique Vérification du bien fondé des différentes étapes du Zététique.

Exégétique Énonciation en termes généraux d'une propriété qui permet de déterminer la valeur de l'inconnue en fonction des données (paramètres) et ce, suite à notre lecture des *Cinq livres des Zététiques*, de manière immédiate ou en nous ramenant à un problème déjà résolu. Cette partie semble correspondre à l'énoncé, en italique et entre guillemets dans la traduction de Grisard (Voir chapitre 2, §1), qui termine chacun des zététiques des *Cinq livres des Zététiques*.

Le titre *Cinq livres des Zététiques* semble alors tout à fait cohérent avec le contenu de ce livre, étant donné que, ne se fiant qu'aux extraits que nous avons lus, chaque zététique correspond de fait uniquement à la mise en évidence de l'inconnue suivi de l'Exégétique. Il ne semble pas y avoir de Poristique. Dans les remarques qui suivent, nous ferons une lecture plus fine visant à nous éclairer sur la justesse de ces premières impressions.

2.2 Examen du chapitre I: *De la définition et division de l'Analytique, et des choses aydans au Zetetique*, du chapitre VI: *De l'examen des Théorémes par le Poristique*, et du chapitre VII: *De l'office du retique*

Synthèse

Viète définit synthèse comme *l'Assumption du concedé par les consequences tirées de la fin et compréhension du requis*[2] (Vaulézard p. 13). La traduction de Smith (p.

320) est plus claire: *taking the thing that is granted and proceeding by mean of what follows to the conclusion and comprehention of the thing sought.* Le mot synthèse vient de συντιθημι qui signifie composer, construire.[3] Pappus donne la définition suivante: *Dans la synthèse, au contraire, supposant la chose finalement perçue par l'analyse comme étant déjà obtenue, et disposant dès lors ses conséquences et ses causes dans leur ordre naturel, puis, les rattachant les unes aux autres, on aboutit en dernier ressort à contruire la chose cherchée; et c'est ce que nous appelons la synthèse.*[4] Les Grecs considéraient que la synthèse constituait le mode obligé de la démonstration. Elle a toutefois l'inconvénient de supposer connu le résultat à prouver et ne donne aucun indice sur la façon dont ce résultat a été trouvé. La synthèse se divise en deux parties: d'abord la construction dans laquelle est construite la figure géométrique sur laquelle reposera la démonstration, ensuite la démonstration proprement dite dans laquelle il est vérifiée que la propriété à démontrer est bien satisfaite par les différents éléments de la figure issue de la construction.[5]

Analyse

S'inspirant de Théon, Viète définit l'Analyse comme *l'Assumption du requis comme concédé, par les consequences au vrai concedé* (Vaulézard, p. 13),[6] ce qui signifie que prenant comme une donnée les propriétés caractéristiques du *requis* (l'inconnue) et déduisant les propriétés qui en découlent, on parvient à une propriété reconnue comme vraie, soit universellement, soit dans le contexte du problème. Cette définition correspond à celle de Pappus: *la voie qui part de la chose cherchée, considérée comme étant concédée, pour aboutir, au moyen des conséquences qui en découlent, à la synthèse*[7] *de ce qui a été concédé. En effet, en supposant, dans l'analyse, que la chose cherchée est obtenue, on considère ce qui dérive de cette chose et ce dont elle est précédée, jusqu'à ce que, revenant sur ses pas, on aboutisse à une chose déjà connue ou qui rentre dans l'ordre des principes; et l'on nomme cette voie l'analyse en tant qu'elle constitue un renversement de la solution.*[8] Vaulézard souligne en note que le terme analyse vient du mot grec αναλυω qui signifie résoudre. Viète semble faire une différence entre le terme

2 Dans la version van Schooten, p. 1, *Adsumptio concessi per consequentia ad quæsiti finem & comprehensionem.*

3 Voir Vaulézard, p. 15 et Pappus, t. 2, p. 477, note 2.

4 Pappus, t. 2, p. 477.

5 Heath, T.L., vol. 1, p. 141.

6 Dans la version von Schooten, p. 1, *Adsumptio concessi per consequentia ad quæsiti tanquam concessi per consequentia ad verum concessum.*

7 Que veut dire ici le mot *synthèse*? Serait-ce le résultat qui sera le point de départ de la synthèse qui le démontrera adéquatement?

8 Pappus (ver Eecke), t. 2, p. 477.

Analyse et *Analytique*, l'analytique étant la pratique de l'analyse, cette pratique étant même peut-être circonscrite aux mathématiques. L'emploi de l'expression *art Analytique* semble suggérer une telle interprétation, *art* ayant une connotation technique avant le XIX^e^ siècle et Viète définissant l'expression *art Analytique* comme *la doctrine de bien trouver aux Mathématiques*. Notons le choix du mot *doctrine* qui d'une part a une connotation de vérité et d'autre part se veut en relation avec une action.[9] Aussi n'y a-t-il pas trois types d'analyse mais plutôt trois *espèces d'Analytique*: Le Zététique, le Poristique et le Rhétique ou Exégétique, espèces dont nous tenterons maintenant de préciser le sens.

Zététique

La première espèce d'analytique est le Zététique, *par lequel est trouvé l'égalité ou proportion de la grandeur requise, avec celles qui sont données* (Vaulézard, p. 13)[10]. Cette définition laisse songeur. Le Zététique se limite-t-il à la recherche d'une expression mathématique (équation ou proportion) qui met en relation l'inconnue et les valeurs connues? Si c'est le cas, le Zététique correspond simplement à la mise en équation d'une situation problématique.

Une première indication de l'objectif du Zététique ressort à la lecture de la définition du Poristique qui suit immédiatement la définition de Zététique que nous venons de citer (Vaulézard, p. 13): *Le Poristique, par lequel est enquis de la verité du Théorème ordonné, par l'egalité ou proportion*. Ce *théorème ordonné*, quel est-il ? La traduction de Smith (p. 321) est: *theorem set up*. Smith semble donc interpréter ce *théorème ordonné* comme étant le résultat du Zététique. Pour soutenir cette interprétation, voyons d'abord le sens du mot théorème. Les Anciens ont longuement discuté de l'usage des mots problèmes et théorèmes. Ne retenons ici que les définitions de Proclus: *Again the deductions from the first principles are divided into* ***problems and theorems****, the former embracing the generation, division, subtraction or addition of figures, and generally the changes which are brought about in them, the latter exhibiting the essential attributes of each.*[11] Ajoutons aussi une de ses remarques: *in theorems the demonstration is worthy of study for its own sake as being capable of putting before us the nature of the thing sought.*[12] Le *théorème*

---

9 Viète écrit en latin *doctrina* que Smith traduit par *science*. *Doctrina* a une connotation de «règle de conduite». Par ailleurs le *Petit Robert* donne comme première définition de doctrine : ***Ensemble de notions qu'on affirme être vraies et par lesquelles on prétend fournir une interprétation des faits, orienter ou diriger l'action***. C'est nous qui soulignons.

10 Dans la version van Schooten, p. 1, *quâ invenitur æqualitas proportiove magnitudinis, de quâ quæritur, cum iis quæ data sunt.*

11 Voir, à propos de ces discussions Heath, T. L., vol. 1, Introduction , p. 124 à 129. La citation de Proclus est aux pages 124-125.

12 *Ibid.*, p. 126.

semble donc un énoncé qui caractérise l'inconnue et ce à un niveau de généralité identique à celui du problème. Dans l'édition Vaulézard des *Cinq livres des Zététiques*, ce dernier a d'ailleurs nommé explicitement *Théorème* l'énoncé général terminant la «résolution» de chacun des zététiques, et qui précède immédiatement l'exemple numérique.

En ce qui a trait au mot *ordonné*, Viète ne devient explicite qu'a la fin du chapitre V, *Des loix du Zététique*, lorsqu'il dit au paragraphe 14: *Finalemment, l'égalité estant ordonnee, et l'Analogie*[13] *aussi, soit estimé et tenu pour certain l'office du Zetetique estre accomply* (Vaulézard, p. 51). Donc c'est pour arriver à une équation *ordonnée* que l'art du Zététique doit être déployé. Mais encore faut-il donner un sens à ce mot *ordonnée*. Le paragraphe 12 définit équation ordonnée comme une équation de la forme, en langage moderne, $x^k Q(x) = CD$, où Q est un polynôme ou une grandeur connue C et D sont composés uniquement de grandeurs connues, de sorte que $x^k : C :: D : Q(x)$.[14] Le mot *ordonné* semble donc se référer au fait que l'inconnue soit jusqu'à un certain point mise en évidence. Nous y reviendrons à la section six.

Les remarques que Vaulézard ajoute en notes au chapitre I valent qu'on s'y attarde quelque peu. A la note *c*, le commentateur souligne que le mot Zététique vient du grec ζητεω qui veut dire chercher et que le Zététique *est deffinie, l'invention de l'egalité ou proportion, de la grandeur requise avec la grandeur, ou grandeurs données* (Vaulézard, p. 15). Plus loin dans la même note il ajoute que le but du Zététique est *de trouver l'égalité de la chose requise avec la donnée*. Dans ses remarques, Vaulézard n'emploie pas le terme *ordonnée*. Par ailleurs, il parle toujours de trouver **l'**égalité et non pas **une** égalité, sous-entendant qu'il ne s'agit pas de n'importe quelle équation ou proportion. D'ailleurs, dans la note *c*, Vaulézard ne dit-il pas, parlant du Poristique, *examiner cette égalité ou proportion*, se référant clairement à l'égalité dont il est question dans sa définition du Zététique?

Poristique

Viète définit le Poristique *par lequel est enquis de la vérité du Theoreme ordonné, par l'egalité ou proportion ordonnée*. Nous avons déjà vu dans notre discussion du Zététique le sens à apporter au terme *Théorème ordonné*. L'autre mot-clé de cette définition est *enquis*. Vaulézard souligne en note que le terme Poristique provient du grec ποριζω qui signifie colliger, comparer, examiner, d'où l'interprétation que nous avons

13 *Analogie* signifie proportion.

14 Smith (p. 345, note 42) donne l'exemple : la proportion $x^2 + ax : b :: c : d+x$ est équivalente à $x^3 + dx^2 + adx + ax^2 = bc$ qui est donc une équation ordonnée.

finalement donnée à Poristique en groupe: Vérification du bien fondé des différentes étapes du Zététique. Mais que cela veut-il dire dans les faits? Tel que dit, Poristique semble se confondre avec la Synthèse du fait qu'il était d'usage de considérer qu'une vraie preuve ne pouvait prendre que cette forme. Cette interprétation semble confortée par le début du court chapitre VI[15] qui a pour titre *De l'examen des Theorèmes par le Poristique*.Viète y souligne que (Vaulézard, p. 52) l'*Analitique du Zetese* est *parfaite* si elle *se confère de l'hypothese à la thèse*, autrement dit si l'on peut inverser le raisonnement analytique en un raisonnement synthétique, comme le veut la tradition mathématique grecque. Ainsi il semble y avoir contradiction dans les termes, puisque la Poristique est une analytique et n'est donc pas sous le chapeau de la synthèse. Mais cette ambiguïté est nuancée quelques ligne plus bas: *si quelque chose fortuitement offerte, ou autre que l'inventee, est proposee, de laquelle la verité doit estre enquise, lors la voye du poristique sera premierement tentee, de laquelle en-apres est fait un facile retour au syntese* (...). Donc le Poristique examine bien la vérité du raisonnement du Zététique, mais comme habituellement ce raisonnement est intégralement réversible pour se présenter sous forme de synthèse, le Poristique n'intervient que lors de difficultés qui doivent être explicitées. Viète ne donne pas d'exemple précis d'usage du Poristique, malgré ses références à Théon, Apollonius et Archimède. Toutefois, Vaulézard sent le besoin de faire une démonstration *par le Poristique* dans ses commentaires du zététique I-4 «autrement».[16] Cette démonstration survient suite à l'introduction du symbole ==, qui tient lieu de valeur absolue d'une différence et dont nous reparlerons à la section 5. Elle semble viser à surmonter les ambiguïtés que font surgir cette notation. La première phrase de la démonstration est révélatrice à cet égard: *La verité du theoreme sera rendue palpable ainsi* (...). Il part alors du *Théorème* résumant le résultat du zététique, énoncé équivalent à l'expression:

$$\frac{SB == RD}{S == R} \text{ soit } F.$$

Il entreprend alors un raisonnement qui utilise la logistique spécifique et dans lequel il est tenu compte de la difficulté introduite par la notation == en prenant en considération les deux cas possibles: B supérieur à D, et B inférieur à D. Il déduit la propriété caractérisant le côté cherché c'est-à-dire:

$$\frac{S}{R} = \frac{F-D}{F-B}.$$

---

15 D'ailleurs la brièveté de ce chapitre indique la moins grande importance du Poristique par rapport au Zététique.

16 Vaulézard, p. 86. Le mot «autrement» fait référence à la deuxième démonstration du zététique I-4. Vaulézard parle aussi de démonstration par le Poristique dans ses commentaires du zététique I-5.

Pour la même raison que pour les zététiques I-4 et I-5, une démonstration par le Poristique a été jointe par Vaulézard au zététique I-6. Il signale à la fin du zététique I-7 qu'à partir de ce moment Viète prend soin de fixer au départ l'ordre respectif des paramètres (comme B et D ci-haut) et que *c'est la cause pourquoy nous en avons obmis les demonstrations par le mesme Poristique* (Vaulézard, p.101). Le mot Poristique ne semble pas apparaître dans la suite des *Cinq livres des Zététiques* aussi bien dans le texte de Viète que dans les commentaires de Vaulézard.[17]

Exégétique ou rhétique

Le sens d'Exégétique ou Rhétique nous a semblé plus fluide que celui du Zététique et celui du Poristique. La définition qu'en donne Viète est: *par lequel est exibée la mesme grandeur dont est question, par l'égalité ou proportion ordonnée* (Vaulézard, p. 13). Vaulézard indique à nouveau les mots grecs d'où viennent ces terme: ζεω, qui signifie dire, expliquer, et εξηγεομαι qui signifie expliquer, interpréter. Cette «exhibition» laisse penser que l'Exégétique correspond à la mise en évidence ou en relief du résultat du Zététique. De là l'idée (sur laquelle le groupe de lecture s'est laissé) que l'Exégétique était simplement l'énonciation en prose de l'équation obtenue par le Zététique.

Cette interprétation suscite toutefois deux questions. Pourquoi Vaulézard a-t-il cru bon de nommer *Théorème* cet énoncé, *Théorème* qui comme nous l'avons vu semble plutôt faire partie du Zététique? De plus, au chapitre I de l'*Introduction à l'art analytique*. Viète nous dit que l'Exégétique est de sa création, n'étant pas présente chez les Grecs. Viète aurait-il donné une telle importance au fait d'énoncer en mots l'équation ordonnée, en en faisant la troisième analytique? Plus troublant encore, au chapitre VII, *De l'office du*

[17] Pappus divise l'analyse en deux genres, comme Théon le faisait aussi. Le premier est *celle* (analyse) *qui est propre à la recherche, qu'on appelle théorétique*. L'explication de Pappus ne nous indique pas clairement la forme du but ultime de l'analyse théorétique: *Dans le genre théorétique, on considère comme établi et vrai ce que l'on cherche, puis, par les conséquences qui en découlent, admises comme vraies, et comme répondant à l'hypothèse, on aboutit à une chose qui est déjà accordée; et si cette chose accordée est vraie, ce que l'on cherche est vrai aussi, et la démonstration sera l'inverse de cette analyse.* (Pappus, t.2, p. 478). Pappus définit ensuite le deuxième genre d'analyse, qu'il appelle problématique : *celle qui s'applique à trouver ce qui est proposé*, ou plus loin, *dans le genre problématique, on admet que la proposition est connue; puis, au moyen des conséquences qui en ressortent et admises comme vraies, on arrive à quelque chose d'accordé ; et si ce qui est accordé peut être réalisé ou est déjà acquis, (...) la proposition pourra être réalisée aussi, et la démonstration sera de nouveau l'inverse de l'analyse*. (Pappus, t.2, p. 478). Ver Eecke laisse entendre dans ses notes aux deux définitions de Pappus que l'analyse théorétique est similaire au Zététique de Viète et que l'analyse problématique l'est au Poristique de Viète conforté peut-être en cela par le fait que le mot ζητητικον apparaisse dans la première définition et que le mot ποριστικον soit dans la seconde. En réalité, considérant particulièrement les mots *si ce qui est accordé peut être réalisé ou est déjà acquis*, il nous semble que l'analyse problématique corresponde plutôt au Zététique. Cependant une étude plus fine reste à faire.

rhétique, Viète donne une grande importance à l'Exégétique en disant d'elle *atque potissimum ad artis ordinationem pertinere, (cum relique due* (c'est-à-dire le Zététique et le Poristique) *exemplorum sint potius quam preceptorum).*[18] Fort de cette remarque, et se rappelant que le livre de Viète *De numerosa potestatum ad exegesim resolutionc* porte sur la résolution des équations numériques par approximation des racines, l'on peut conclure que l'Exégétique est **la détermination de fait de l'inconnue cherchée dans un problème**. Le chapitre VII qui dans un premier temps nous était apparu incompréhensible s'éclaire maintenant. Dans la citation ci-haut, le *potissimum* s'explique. A quoi sert d'arriver à une équation canonique si l'on est par la suite incapable d'en extraire la valeur de l'inconnue? Le pouvoir du Zététique n'est qu'une potentialité sans l'action de l'Exégétique qui permet d'arriver au terme de la résolution d'un problème. Même si cette résolution a pour point de départ une équation issue du Zététique dans lequel la nature des grandeurs ne joue aucun rôle, l'Exégétique lui se réalise en tenant compte de la nature géométrique ou arithmétique du problème.

Ainsi Viète est-il justifié d'affirmer qu'il ajoute une nouvelle partie à l'Analyse. L'Exégétique est nouvelle non seulement de par le fait qu'elle s'ajoute aux deux autres parties mais aussi dans le fait que cette recherche de solutions à partir de l'équation ordonnée donne lieu à de nouvelles découvertes. Le cas de la résolution numérique des équations et de ses nouvelle méthodes d'approximation des racines n'est pas unique. Nous verrons dans notre étude du chapitre VIII qu'il existe aussi de nouvelles approches dans le cas de problèmes de nature géométrique.

Les commentaires de Vaulézard nous éclairent ici aussi sur la nature de l'Exégétique, en particulier lorsqu'il ajoute, après l'énoncé du *théorème* exprimant en mots l'équation ou la proportion ordonnées, un *Exégétique en lignes*[19]. Cet Exégétique est en fait une construction qui permet d'exhiber un segment de droite satisfaisant les données du problème. Le fait que cet *Exégétique en lignes* soit souvent suivi d'une *Démonstration du théorème* de forme synthétique donne l'impression que l'Exégétique constitue, à tout le moins pour les problèmes géométriques, la première partie de la synthèse.

---

18 Cette phrase est traduite de diverses façon. Vaulézard : (l'Exégétique) *sera censé appartenir principalement à l'ordonnance de l'art, les deux restantes estans plustost exemples que preceptes* Smith: (l'Exégétique) *is to be considered (...) as one which pertains principally to the application of the art (since the two others are concerned more with general patterns than with precepts (...)).* Par ailleurs, Klein (p. 168) traduit ce passage ainsi : (l'Exégétique) *must be considered to be most powerfully pertinent to the establishment of the art, since the two remaining [parts of analytic] provide examples rather than rules.*

19 Vaulézard emploie habituellement les seuls mots *EN LIGNES*. Toutefois, p. 89 il parle expressément d'*Exégétique en ligne*.

Conclusion

Notre étude du texte de Viète, de ses traductions, ainsi que des commentaires de Vaulézard, nous amène à nuancer les interprétations issues des discussions en groupe lors de la séance de lecture et même à réviser celle de l'Exégétique. Le sens des mots analyse et synthèse demeure le sens classique de Pappus. Une nuance toutefois est apportée par le terme d'analytique qui fait référence à une pratique de l'analyse. Nous définissons donc comme suit les trois parties de l'analyse ou, dans les termes de Viète, les trois espèces:

Zététique	Mise en équation du problème et manipulation de cette équation pour la mettre sous la forme $x^kQ(x) = CD$ où Q est un polynôme ou une grandeur connue et C et D sont composés uniquement de grandeurs connues. Une telle équation est dite ordonnée et la proportion qui lui correspond est elle-même dite ordonnée.
Poristique	Dans le cheminement synthétique, étude de certains passages délicats dont la réversibilité par rapport au cheminement analytique n'est pas assurée de façon immédiatement convaincante.
Exégétique ou Rhétique	Détermination de la ou des racines de l'équation ordonnée issue du Zététique.

§3. Égalités et proportions (Chap. II)

3.1 Impressions et commentaires principaux lors de la séance de lecture

Ce chapitre ne fut abordé qu'assez brièvement, à la fin de la première séance de lecture sur l'*Introduction à l'art analytique* le premier mars 1990. On nota que Vaulézard cite le livre 7 d'Euclide après le cinquième *symbole* (interprété comme *stipulation*, terme utilisé par Smith). Pourquoi le livre 7, sur l'arithmétique, alors qu'on parle de grandeurs en général? Il n'y eut pas de réponse en séance, pas plus que de justification aux différences de texte chez Vaulézard et chez Smith dans les commentaires qui suivent le dixième symbole. L'ensemble du chapitre ne parut guère problématique au groupe qui n'y revint pas par la suite.

3.2 Examen du chapitre II: *Du symbole des egalitez et proportions*

Terminologie

Le titre *Du symbole des egalitez et proportions* est assez frappant pour un lecteur moderne, outre le singulier singulier de Vaulézard [d'ailleurs corrigé, si l'on peut dire, dès la première phrase: *Le symbole* (...) *sont ceux-ci* (p. 16)]. C'est le terme même qui est curieux et il semble désigner plus que *Signe de reconnaissance; cachet* que certains dictionnaires donnent (voir Bornèque et Cauet). Il s'agit d'axiomes ou de propriétés générales, comme le montre une lecture attentive. D'ailleurs, Vaulézard cite les *communes sentence* d'Euclide pour les quatre premiers symboles (*1- le tout est plus grand que sa partie; 2- les choses égales à une mesme sont égales entre elles*...). Et il donne des explications, justifications, démonstrations (?) des autres symboles, en se référant essentiellement à Euclide. Viète utilise le pluriel *symbolis* dans le titre du chapitre et utilise encore *symbolo* dans le chapitre IV (p. 7) pour $\frac{B\ Planum}{A}$. *Symbole* pourrait donc parfois ne signifier guère plus pour Viète que pour nous, à savoir *signe* ou *assemblage* de *signes* et, selon cette interprétation minimaliste, le titre du chapitre II serait, tout bonnement, «Des signes d'égalité et de proportion» ou, même, «Des égalités et des proportions».

Structure et contenu du chapitre

Viète est très concis: son texte comprend seize énoncés et quatre très courtes phrases. Le tout tient en une page dans l'édition latine de van Schooten, y compris les commentaires de celui-ci, en italiques, sous les énoncés 10 et 11. Smith traduira la version van Schooten sans ajout, et en y omettant la dernière phrase de Van Schooten, sous 11, relative aux traces (*vestigia*) d'un certain mode d'argumentation chez Apollonius et d'autres anciens géomètres (où la composition des raisons étant identifiée à un produit, la *séparation* des raisons correspond à une division). Il ajoute aussi, entre crochets, les formulations symboliques modernes. Quant à Vaulézard, il explique, justifie, donne des exemples numériques. Son texte est, de plusieurs fois, plus long que celui de Viète. Ses ajouts ne nous ont pas toujours aidés à comprendre.

Les six premiers énoncés touchent à l'égalité (conservée sous l'addition de choses égales, etc.). Les énoncés 7, 8, 9, 10, 11 portent sur les proportions et les règles d'opération sur celles-ci. L'énoncé 12 étend aux raisons (nous dirions proportions) les énoncés 5 et 6 [l'égalité n'est pas modifiée par le produit (ou la division) des termes des deux membres par une même grandeur]. L'énoncé 13 correspond à ce que nous appelons

la distributivité de la multiplication sur l'addition. L'énoncé 14 comprend à la fois l'associativité et la commutativité de la multiplication et un certain analogue pour la division (nous y reviendrons). Les énoncés 15 et 16 explicitent l'équivalence entre le langage de la proportionnalité et le langage des équations. Nous écririons (et c'est ce que Smith, moderne lui aussi (1955), fait (ou presque):

$$ab = cd \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{d}{b}.$$

Le membre de droite est écrit *a: c :: d: b* par Smith (p. 324).

La proportion est dite *constitution* des égalités et l'égalité est la *résolution* de la proportion. L'emploi de ces termes spécifiques et le titre même du chapitre (*Du symbole des égalités et proportions*) indiquent l'importance de cette équivalence. Elle permet le passage de la pensée proportionnelle à l'écriture sous la forme d'équations que la postérité a finit par privilégier, de façon de plus en plus exclusive. C'est ce que comprend Smith en y voyant *the paramount stipulation governing equations and proportions*. Cependant, Vaulézard réserve cette appréciation *fondement principal des égalités et proportions* au *Symbole* 14, puisque l'énoncé de cette appréciation est suivi d'un long développement (plus d'une page) sur le *Symbole* 14. L'édition van Schooten ne permet pas de trancher, puisque la phrase de Viète: *Κυριον autem aequalitatum & proportionum symbolum, omnisque in Analysibus momenti est* (p. 2) suit l'énoncé 14 mais est immédiatement suivie de l'énoncé 15. On sait que *autem* peut marquer ou l'opposition ou la liaison (voir Bornèque et Cauet). Smith choisit l'opposition (*But the paramount stipulation...*) et passe donc aux énoncés 15 et 16 ainsi qualifiés à l'avance. D'un point de vue global, les énoncés 15 et 16 semblent plus centraux, nous l'avons vu. Ils sont fréquemment utilisés dans les zététiques en cours d'examen des relations entre quantités et en cours de manipulation d'expressions (davantage, dans ceux des zététiques que nous avons lus en groupe, que la commutativité et l'associativité, desquelles nous n'avons vu aucun usage explicite).

On peut aussi noter que ces règles sur l'égalité, relatives, entre autres, à des opérations d'addition, de multiplication, etc. sont énoncées dans le chapitre II, et les règles analogues quant aux opérations sur les *espèces ou formes des choses: comme par les lettres de l'Alphabet* (Vaulézard, p. 30) sont données dans le chapitre IV. Le chapitre II porterait-il donc seulement sur les grandeurs particulières, voire numériques? Il est à noter que Vaulézard s'y réfère aux livres 1, 2, 5, 6, 7 d'Euclide, donc à des propriétés générales (au livre 5 sur les grandeurs) et à un livre arithmétique (livre 7). Mais le lecteur moderne n'a certes pas à exiger une axiomatique impeccablement structurée chez des auteurs de la fin du XVI^{e} siècle comme Viète et de la première moitié du XVII^{e} siècle comme van Schooten et Vaulézard. Les concepts modernes de nombres réels et d'espaces vectoriels sont encore en gestation à cette époque.

Examen de quelques énoncés

Le **premier énoncé** chez Viète est *totum suis partibus æquari* ce que Smith traduit correctement, et littéralement, *The whole is equal to its parts*, tandis que Vaulézard dit *Le tout est plus grand que sa partie*, ce qui correspond plutôt à la formulation d'Euclide qu'à celle de Viète.

L'**énoncé huit** est, pour nous, moderne, un peu cryptique chez Viète: *Si proportionalia similia proportionalibus similibus addantur, tota esse proportionalia.* (Viète, p.2). Vaulézard et Smith traduisent littéralement. *Si aux grandeurs proport. semblables, sont adjoustées des grandeurs proportionnelles semblables, les toutes seront proportionnelles* (Vaulézard, p. 17); *If like proportionals are added to like proportionals, the sums are proportional*, (Smith, p. 323). Heureusement Smith, à partir de l'énoncé 7, ajoute des énoncés en notation plus moderne, ici: *if a:b::c:d; then a + c: b + d::a:b*, (Smith, p. 323). Vaulézard recourt lui à deux proportions, mais, en fait, elles sont toutes équivalentes à 2/3, et il s'agit, selon nous, d'une inutile complication:

A.2	*B.3*	*C.4*	*D.6*	
E.6	*F.9*	*G.8*	*H.12*	
I.8	*K.12*	*L.12*	*M.20*	(Vaulézard, p. 18)

où, selon notre écriture actuelle,

$$\frac{A}{B} = \frac{E}{F} \quad \text{et} \quad \frac{C}{D} = \frac{G}{H}$$

et où l'on fait I = A + E, etc.

L'**énoncé quatorze** porte sur l'égalité des produits (ou des divisions) peu importe l'ordre dans lequel le produit (ou la division) est faite, lorsqu'il y a plusieurs facteurs. Il ne s'agit, bien sûr, pas de penser que Viète ou Vaulézard croyaient, selon notre écriture que,

$$\frac{(a/b)}{c} = \frac{a}{(b/c)}$$

mais plutôt, comme Smith l'écrit, que

$$\frac{(a/b)}{c} = \frac{(a/c)}{b}$$

et c'est ainsi que Vaulézard l'entend très clairement quand il parle de *multiplication continuelle* (Vaulézard, p. 20), mais il l'expose moins bien dans sa présentation de l'application continuelle (nous dirions division par un produit de facteurs). Il décrit ce que nous noterions (B/D)/F (mais omet de l'écrire (B/F)/D et de rappeler l'égalité de ces deux applications continuelles). Vaulézard ouvre la porte à une généralisation: *La mesure s'entendra de plus de deux grandeurs* (Vaulézard, p. 20), c'est-à-dire non plus B *à appliquer continuellement sur D et F*, mais, comme nous dirions, l'équivalent de

$$\frac{a}{b_1 b_2 \ldots b_n} .$$

(et l'invariance du résultat final, peu importe par quel b_i l'on divise d'abord a, puis par quel autre b_i l'on divise le premier quotient, etc.).

Conclusion provisoire

Ce chapitre, chez Viète, donne très concisément des propriétés essentielles de l'égalité et des proportions. Et ce, sans démonstration ni exemple. Van Schooten croit bon de commenter deux énoncés (quant à la composition et à la séparation des raisons, selon ses termes latins, vues comme équivalentes au résultat de produits (ou de quotients) de termes proportionnels. Quant à Vaulézard, il argumente, peut-être parfois circulairement, se réfère fréquemment à Euclide, donne des exemples ... Didactiquement, la version Smith semble la meilleure: elle est assez concise et a, comme seuls ajouts, des notations modernes, permettant de clarifier et de fixer le texte uniquement littéral de Viète. Après tout, pourquoi ne pas se servir de l'algèbre, que Viète a contribué à développer? Par un juste retour des choses, le langage symbolique (ou des *espèces*), utilisé très parcimonieusement par Viète dans son *Introduction à l'art analytique*, est appliqué par Smith à cet ouvrage, de façon à en faciliter la compréhension, et ce, de façon plus économique et plus claire que ne le fait Vaulézard dans ses longs propos.

§4. Homogénéité et genres de grandeurs (Chap. III)

4.1 Impressions et commentaires principaux lors de la séance de lecture

Ce qui frappa particulièrement les membres du groupe ce fut le contact avec l'exigence d'homogénéité faite par Viète. Le caractère polémique à l'égard des Anciens, qui

n'auraient pas assez tenu à n'additionner, soustraire ou comparer entre elles que des grandeurs de même dimension comme nous dirions aujourd'hui, fut peu souligné, les lecteurs n'ayant, dans le contexte des séances, pas tellement des préoccupations de chronologie que des visées de contact avec une oeuvre, en l'occurrence celle de Viète. L'utilisation d'une terminologie et (chez Vaulézard) d'une notation de nature mixte pour désigner ce que nous appellerions maintenant les puissances de l'inconnue fut, par contre, l'occasion de nombreuses réflexions. Pourquoi pas une notation pour l'inconnue de puissance un, disons L pour longueur (ou largeur), qui ajoutée au Q et au C (carré et cube, respectivement) eut simplifié l'identification symbolique? Et pourquoi une double classification: les degrés de l'inconnue (côté ou racine chez Viète) et les genres des *grandeurs comparées*? Sans compter les usages si différents des nôtres: *scalaires* pour des grandeurs pluridimensionnelles, *puissance* pour le degré supérieur d'un polynôme (nous intervertirions presque puissance et degré dans la terminologie actuelle).

4.2 Examen du chapitre III: De *la loi des Homogènes, ensemble des genres et degrez des grandeurs comparées*

La loi des homogènes

Viète insiste de façon très claire et très nette sur l'importance de ne comparer que des grandeurs homogènes. Les deux traducteurs utilisent, à cet effet, des termes non équivoques: *première et perpétuelle loy* (Vaulézard, p. 22), *supreme and everlasting law* (Smith, p. 324). Vaulézard donne davantage de justifications, d'exemples et de détails pour faire voir l'application de cette loi: *la ligne tant grande soit-elle ne peut augmenter la superficie* (Vaulézard, p. 23) etc., et l'on doit donc s'assurer de l'homogénéité des grandeurs pour l'addition et la soustraction, mais non pour la multiplication et la division (dite "l'application" dans le vocabulaire de Vaulézard), où les genres des résultats sont, respectivement, supérieurs ou inférieurs à celui de la première grandeur.

Viète cherche querelle aux Anciens sur le sujet, et voit dans le fait *qu'ils n'ont aucunement pris garde à ces genres* (Vaulézard, p. 24) la cause de *l'obscurité des Analytiques des anciens* (Vaulézard, p. 24). Smith (p. 325) fait une traduction porteuse de cette même accusation ou reproche, mais Vaulézard explicite, de son cru: ils *ajoustoient et soustraioient indifféremment toutes les grandeurs les unes des autres soit qu'elles fussent de mesme ou divers genres* (Vaulézard, p. 24). La charge est claire, mais est-elle fondée? Diophante peut certes donner prise à l'accusation de non respect de la loi d'homogénéité, mais non Al-Khowarizmi tandis que Abu Kamil renonce à l'homogénéité des dimensions[20] qui, au contraire est respectée de façon stricte par Al-Khayyam[21]. Sans

faire une histoire documentée de la question, on voit combien la thèse semble difficile à soutenir à la lumière de nos connaissances actuelles. Viète ne dit pas à quels auteurs *anciens* s'adresse le reproche et il n'avait sans doute pas une connaissance directe des ouvrages arabes.

L'exigence d'homogénéité est fondée, on l'a vu, d'une part sur la nécessité d'équivalence entre les égalités et les proportions et d'autre part sur l'interprétation géométrique. On peut se demander comment Viète justifiait la considération de degrés supérieurs à trois et quel «sens» il pouvait accorder à QC (notre x^5) ou CCC (notre x^9) etc.? Ce semble être un de ces cas, nombreux dans l'histoire des mathématiques, où la dynamique d'une méthode ou d'une notation déborde du cadre conceptuel originel, tout en conservant provisoirement, en totalité ou en partie, des vocables et des exigences qui, en toute logique, n'ont plus à être respectés. Les ajouts polémiques de Vaulézard paraissent dans l'édition de 1630 de sa traduction. En 1637, dans sa *Géométrie*, Descartes règle la question et écarte tout scrupule en proposant une astuce casuistique remarquable. Bien sûr, *toutes les parties d'une mesme ligne, se doivent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'une que l'autre*[22] mais, lorsque l'unité est déterminée, on peut mentalement supposer des multiplications et des divisions par l'unité autant de fois que nécessaire pour «homogénéiser» (notre terme) les grandeurs à comparer: (...) *lorsque l'unité est déterminée, à cause qu'elle peut être sousentendue par tout ou il y a trop ou trop peu de dimensions: comme s'il faut tirer la racine cubique de aabb - b, il faut penser que la quantité aabb est divisée une fois par l'unité, et que l'autre quantité b est multipliée deux fois par la mesme*[23]. Viendra très vite le temps où l'on ne pensera même plus à ces commodes unités, absentes et présentes. Mais déjà, à cette époque, d'autres auteurs abandonnaient la stricte obédience à la loi d'homogénéité pour céder aux attraits et à l'efficacité calculatoire d'une symbolique algébrique à la moderne. Dans son livre, Jacob Klein cite des ouvrages de Harriot (1631) et de Marino Ghetaldi (1630) et affirme: *For Ghetaldi, as for Harriot, the "lex homogeneorum" is no longer a controlling factor.*[24]

Ce même Ghetaldi écrivit une postface à l'édition latine du traité de Viète *De Numerosa Potestatum Ad Exegesim Resolutione* (1600), réimprimé en mai 1989 avec une traduction en français par J. Borowczyk (IREM de Poitiers). Les réserves exprimées par Klein ne semblaient donc pas de nature à empêcher la contribution de Ghetaldi à la diffusion d'oeuvres de Viète. L'étude de tels points historiques assez fins nous éloignerait cependant de notre propos général.

---

20 Dahan-Dalmedico, A., et Peiffer, J., p. 86.

21 *Ibid.*, p. 95.

22 Descartes, p. 299 de l'édition originale, p. 7 de l'édition Dover.

23 *Ibidem.*

24 Klein, J., note 275, pp. 280-282. La citation est de la page 282.

Que l'on puisse introduire, sans provoquer de hauts cris, les expressions comme $x^5 + 2x^3 - 8 = 0$ dans l'enseignement pré-universitaire, est en soi un témoignage du caractère purement numérique ou purement formel de l'algèbre élémentaire dans les écoles d'aujourd'hui.

Les *genres*

Viète fait une classification des genres des **grandeurs scalaires** (le mot scalaire se réfère à l'idée d'échelle, de gradation) et des genres des **grandeurs comparées**. Partant d'une grandeur, appelée *costé ou racine*, les genres *ascendent proport. par la multiplication continuelle du costé ou racine par soy-même, comme la racine ou costé multiplié par soy faict Q* (...) (commentaire de Vaulézard, p. 24). Là où Smith se contente de traduire l'équivalent de carré, cube, carré-carré, carré-cube, etc. par nos x^2, x^3, x^4, x^5, etc., Vaulézard ajoute une notation bien à lui (*nous avons trouvé bon* (Vaulézard, p.27)), à savoir Q, C, QQ, QC, etc.[25] Les *grandeurs scalaires* (Vaulézard) et les *ladder magnitudes* (Smith) sont donc des grandeurs dimensionnelles. Quoique, dans la pratique, les grandeurs scalaires soient presque toujours issues de la multiplication de l'inconnue un certain nombre de fois par elle-même, Viète ne dit jamais spécifiquement que les grandeurs scalaires sont nécessairement issues d'une inconnue. Ainsi, il n'apparaît pas impossible de parler des grandeurs scalaires issues d'une grandeurs donnée B, obtenant ainsi Bcarré, Bcube, Bcarré-carré, etc. Aussi, il ne faut pas se surprendre de voir Viète écrire Z *quadratum* (van Schooten, p. 8), alors que par convention Viète représente les grandeurs connues par des consonnes (voir la section 5 du présent chapitre).

La dénomination d'une grandeur scalaire est basée sur le reste de la division, par trois, de l'ordre (concept non défini) de cette grandeur. Si la division est sans reste, la dénomination est de type cube-cube-...; si le reste est un (par exemple, $16 = 5 \cdot 3 + 1$), la dénomination est carré-carré-cube-cube -... (dans cet exemple, QQCCCC) et c'est ici qu'une notation, disons L (pour longueur ou largeur) semblerait, à nos yeux de modernes, plus "naturelle" (on écrirait LCCCCC); enfin, si le reste est deux, Vaulézard écrit QCC... (par exemple, notre x^{17} est noté QCCCCC). En notations modernes, on a:

(1) $n = 3m + r$

où n = puissance (le degré supérieur du côté ou racine, nous dirions de l'inconnue)

$r = 0, 2$ ou 4

---

25 Au moment de rédiger le présent texte, les auteurs ont pris connaissance de l'utilisation fréquente par Viète lui-même des notations Q, C, QQ, etc. dans son *De Numerosa Potestatum Ad Exegesim Resolutionc* (1600, réédition 1989 par L'IREM de Poitiers sous la responsabilité de J. Borowczyk). Viète emploie N pour les simples grandeurs (nous dirions les grandeurs de degré 1), ce qui aurait simplifié la notation de Vaulézard si celui-ci s'en était servi.

et on écrit alors cette puissance supérieure (cette fois au sens moderne de grandeur multipliée par elle-même n fois)

(2) $x^n = Q^{r/2} C^m$.

La description des genres des grandeurs comparées suit la même logique. Un changement de terminologie permet de distinguer ces grandeurs de la grandeur scalaire de degré maximal. On parle de longueur (ou largeur), de plan, de solide, de plan-plan, de plan-solide etc., pour des grandeurs que nous dirions représentées dans des espaces de dimension 1, 2, 3, 4, 5, etc. Vaulézard là encore ajoute une notation (à partir du second degré): P, S, PP, PS, SS, etc.

Le degré le plus élevé *auquel consiste la grandeur comparée, extraite ou produite du costé, est appelée* ***puissance*** (Vaulézard, p. 28) et les degrés inférieurs sont dits ***degrés parodiques*** [Smith (p. 326) traduit littéralement *parodici* comme *on the way to the power*, pour se contenter ensuite du terme *lower*]. La **puissance** est dite **pure** lorsqu'elle est *exempte d'affection*, et est dite **affectée** si un ou des termes lui sont ajoutés ou soustraits. En notations modernes, x^4 serait une puissance pure tandis que $x^4 + 2x^3$ serait une puissance affectée. Dans ce cas x^3 serait le degré parodique et 2 la ***grandeur adscitice coeficiente***. L'exigence d'homogénéité impose que tous les termes aient même degré «total» (le terme est de nous) et le coefficient a le degré complémentaire à celui du degré parodique, ce coefficient est dit ***subgraduel***. Smith traduit (pp. 326-327) des annotations introduites par van Schooten dans son édition latine de 1646 (postérieure donc à la traduction de Vaulézard). Les coefficients sont donc eux aussi dimensionnels. Il en conclut que pour une puissance (*rung*) donnée (disons n) il y a $2^{n-1} - 1$ puissances affectées (*conjoined powers*). La formulation de l'énoncé général est de nous. Mais la loi est manifestement comprise par van Schooten. L'argumentation procède par énumération dans les cas n = 2, 3, 4 (et le résultat est donné pour n = 5). Mais curieusement, l'énumération des cas, lorsque n = 4, est difficilement convaincante chez Smith à cause de l'usage de *or* (c'est-à-dire: ou) au lieu de «somme de» dans les quatre derniers des sept cas que nous noterons à la moderne, comme le fait Smith:

(1) $x^4 + ax^3$, (2) $x^4 + bx^2$, (3) $x^4 + cx$

(4^1) $x^4 + c$ où ($c = mx^3$ ou $c = dx^2$)

Dans le cas (4^1), il est clair que si $c = mx^3$, on retombe dans le cas (1); et si $c = dx^2$, on revient au cas (2). Il s'agit donc d'écrire (4^1) plus correctement:

(4) $x^4 + mx^3 + dx^2$, ce qui correspond au texte latin de van Schooten (p. 2): *Quadratico-*

quadratum, cum duplici Plano-plano. Uno ex Cubo in longitudinem latitudinemve. Altero ex Quadrato in Planum.

Et alors, on a, enfin:

(5) $x^4 + mx^3 + dx$

(6) $x^4 + mx^2 + dx$

(7) $x^4 + mx^3 + dx^2 + ex$

Dans le cas (7), van Schooten (p. 3) parle à juste tire, de *triplici Plano-plano*, etc.

Et l'on a bien $7 = 2^{4-1} - 1 = 2^3 - 1 = 8 - 1$.

Un argument plus général (pour le cas «n quelconque») s'appuierait sur le fait qu'il peut y avoir ou non un terme comprenant l'inconnue élevée au degré n - 1; de même pour le degré n - 2, etc. jusqu'au degré 1 (et non pas un terme uniquement constant). Il y a donc $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{n-1}$ tels cas, desquels on enlève le cas où il n'y a pas de terme en x^{n-1} ni en x^{n-2}, ..., ni en x^1 (c'est-à-dire, dans le vocable de Viète, le cas où la puissance, x^n est pure, et non affectée). Le nombre de genres d'affectations est donc $2^{n-1} - 1$.

Le texte de Vaulézard contient lui aussi un ajout propre (pp. 26-27). Il s'agit d'une comparaison des grandeurs scalaires de Viète avec les *nombres cossiques* ou d'autres appellations chez des précurseurs algébristes: Stevin, Tartaglia, etc. Deux logiques de dénomination sont en jeu: chez Viète, les dénominations accolées les uns aux autres (et les *caracteres* ou symboles dont se sert Vaulézard) indiquent une multiplication des puissances (entendues au sens moderne) et donc une addition des exposants (pour nous $QC = x^2x^3 = x^{2+3} = x^5$) tandis qu'aux nombres *denommez ou cossiques*, des dénominations accolées signifient une composition des opérations de mise à la puissance indiquée, et donc un produit des exposants (pour nous $QC = (x^2)^3 = x^{2.3} = x^6$). Vaulézard (p. 27) donne comme cas particulier numérique que *si la racine estoit 2, aux nombres denommez, QC vaudrait 64, et aux Scalaires seulement 32* ce qui correspond bien à 2^6 et à 2^5 respectivement. Pas si facile la notation algébrique, même à l'époque!

Conclusion provisoire

La lecture de ce chapitre ne pose vraiment pas de difficultés mathématiques aux didacticiens des mathématiques. Les concepts eux-mêmes, leurs justifications, leurs articulations, les notations et la terminologie, par contre, sont ceux d'un monde des quasi-

débuts de l'algèbre, au sens où nous l'entendons aujourd'hui. L'exigence d'homogénéité des grandeurs à comparer et son origine géométrique expliquent les orientations du texte quant aux degrés des grandeurs, à la notion de degré parodique, à celle de *grandeur adscitice coeficiente subgraduelle*. Cette exigence abolie, ou satisfaite à l'aide soit de multiplications, soit de divisions d'unités fictives mentalement présentes en nombre suffisant (voir Descartes), une bonne partie du chapitre devient caduque (en particulier ce qui a trait aux grandeurs adscitices coeficientes). L'historien pourra chercher dans la littérature primaire ou secondaire des éclaircissements et des approfondissements. Le mathématicien et le didacticien auront été heureux, certes, de connaître ce chapitre (et les diverses variantes selon les éditions et les traductions). Il n'est pas évident qu'ils puissent en faire un usage direct.

§5. Logistique spécifique ou le calcul algébrique (chap. IV)

5.1 Impressions et commentaires principaux lors de la séance de lecture

La lecture du chapitre IV de l'*Introduction à l'art analytique* eut lieu lors de notre dernière rencontre, le 10 mai 1990. Nous avions convenu auparavant que, contrairement à notre habitude, chacun aurait lu ce chapitre avant la rencontre. Néanmoins, il s'est avéré que fort peu avaient effectivement complété la lecture prescrite.

Notre premier point de discussion fut le sens à donner à *Logistique spécifique* et à *Logistique numérique*. De fait la logistique spécifique n'est pas définie clairement si ce n'est par les préceptes introduits dans ce chapitre. Faut-il confondre la Logistique numérique avec le genre de raisonnement que fait Diophante dans ses livres arithmétiques ? Les remarques ajoutées par van Shooten au texte de Viète et qui sont traduites par Smith (p. 329) le laissent croire: *Diophantus has handled the numerical reckoning in the thirteen books of the Arithmetics* (...). Est revenu aussi à l'esprit la remarque de Viète dans le premier chapitre (Vaulézard, p. 14): *la forme de commencer le Zetetique est par l'art propre: non pas en exerçant sa Logique par les nombres qui est cause du peu de fruit que lon tire des Analytiques des anciens; mais bien par la Logistique soubs des espèces nouvellement trouvees, lequel est beaucoup plus heureux et excellent pour comparer les grandeurs que le numerique* (...).[26] Il semble donc que les *Analytiques des anciens* ne reposent que sur la Logistique numérique. De ce fait, les raisonnements de Diophante devraient en être l'exemple le plus important de l'usage de la Logistique numérique. La

[26] Smith (p. 321) traduit ainsi: *In the zetetic art, however, the form of proceeding is peculiar to the art itself, inasmuch as the zetetic art does not employ its logic on numbers - which was the tediousness of the ancient analysts - but uses its logic through a logistic which in a new way has to do with species.*

question mériterait toutefois une étude plus précise. Comme le souligne van Schooten (p. 4, Smith. p. 329) une comparaison entre les raisonnements de Viète et Diophante éclairerait cette question. Cette étude dépasse toutefois le cadre que nous nous sommes fixé ici.

Un autre point d'intérêt fut le vocabulaire utilisé pour parler de chacune des opérations sur les espèces. Ce vocabulaire sera plus précisément analysé dans les sections suivantes. Nous nous sommes particulièrement arrêtés sur l'introduction de la loi des signes. Elle apparaît d'abord dans la présentation de la soustraction et surtout dans celle de la multiplication. La difficulté que représente cette loi est illustrée par l'ambiguïté de la justification donnée par Viète (van Schooten p. 6, Vaulézard p. 36). Nous y reviendrons. Un autre aspect nous a intéressés, la distinction, rendue nécessaire par la loi des homogènes, entre la multiplication comme addition répétée et la multiplication comme produit de deux grandeurs (avec changement de dimension), l'une n'étant pas équivalente à l'autre. Cette distinction nécessaire se manifeste par l'emploi du terme *nombres nombrans* dans les commentaires de Vaulézard (p. 34). Cette expression signifie le coefficient numérique d'un monôme correspondant en langage moderne au 2 dans 2a où 2a veut dire a + a et non pas le produit de la grandeur 2 par la grandeur a.

5.2 Examen du chapitre IV: *Des preceptes du Logistique Specifique*

Le chapitre IV de l'*Introduction à l'art analytique* intitulé *De præceptis Logistices speciosæ* que Vaulézard traduit *Des preceptes du Logistique Specifique*, contient quatre préceptes correspondant à chacune des quatre opérations élémentaires. Viète ne donne aucune définition de chacune de ces opérations. Il ne l'avait d'ailleurs pas fait non plus au chapitre II qui traite des règles (*symbolis, stipulations* en anglais) fondamentales du traitement des proportions et dans lequel il indique l'équivalence entre une proportion et l'égalité du produit des extrêmes et du produit des moyens. On peut en conclure que Viète prend pour acquis la connaissance chez le lecteur de la théorie des proportions telle que présentée dans les *Éléments* d'Euclide. Le but poursuivi dans ce chapitre est plutôt de présenter les règles de manipulations des *espèces ou formes des choses: comme par les lettres de l'Alphabet* (Vaulézard, p.30). Le mot précepte renvoie d'ailleurs à l'idée de règles, de recettes, de *maximes* (le mot est de Vaulézard, p. 31) données dans une perspective pédagogique. Voyons maintenant thème par thème le contenu du chapitre.

Logistique spécifique et logistique numérique

L'usage du mot logistique a évolué depuis Platon jusqu'aux arithméticiens du Moyen-Age et de la Renaissance.[27] Il ne s'agit pas ici de faire l'histoire de cette évolution.

Notons simplement la définition platonicienne telle que donnée par Klein (p. 19): *This whole science, which thus concerns the behavior of numbers toward one another, i.e., their mutual relations, and which first enables us to relate numbers, i.e., to calculate with them, is called the "art of calculation" -- "logistic".* Cette définition de la logistique est conforme avec la définition du *Petit Robert*: *(1611) vieux. Partie de l'arithmétique, de l'algèbre qui concerne les quatre opérations.*

Partant de là, on a l'impression que la Logistique spécifique est clairement ce qui concerne les quatre opérations non pas avec des nombres (ce serait la Logistique numérique) mais avec des représentations des espèces, ici des lettres: *le Logistique Numérique est celuy qui est exhibé et traité par les nombres, le Specifique* (est exhibé et traité) *par especes ou formes des choses: comme par les lettres de l'Alphabet* (Viète, trad. Vaulézard, p. 30). Le mot *espèce* reste cependant non défini.[28] Les symboles utilisés seront chez Viète les lettres majuscules. Mais ils pourraient en être autrement. Toutefois la remarque de van Schooten mentionnée plus haut (p. 36), de même que celle de Viète du premier chapitre de l'*Introduction de l'art Analytique*, aussi rappelée ci-haut, peuvent nous induire à confondre jusqu'à un certain point Zététique et Logistique spécifique. Nous croyons plutôt que la Logistique spécifique n'est chez Viète que l'outil du Zététique. D'ailleurs le fait que le chapitre en décrivant les préceptes précède immédiatement le chapitre sur les lois du Zététique le souligne bien. Le choix des termes *préceptes* et *lois* en est une autre illustration. D'ailleurs Viète ne dit-il pas à la toute fin du chapitre V sur les lois du Zététique que *Diophantus in those books which concern arithmetic employed zetetics most subtly of all. But he presented it as if established by means of numbers and not also by species (which, nevertheless, he used)* (...) (Smith, p. 345). Le Zététique peut donc s'accomplir sans la Logistique spécifique.

Ajouter une grandeur à une grandeur

Comme pour les autres opérations, à aucun moment Viète ne définit l'addition de deux grandeurs. Il souligne toutefois que l'addition de deux grandeurs nécessairement homogènes ne change pas le genre des grandeurs additionnées. Cette addition est notée *A plus B* ou $A + B$. Si A et B sont d'un genre d'ordre supérieur à la ligne, il faut indiquer l'ordre en employant la nomenclature développée au chapitre III sur la loi des homogènes. Ainsi s'ils sont d'ordre 2 il faudra écrire A quarré plus B plan. Notons en passant que Viète choisit presque toujours une voyelle pour exprimer une grandeur scalaire. Il est en cela cohérent avec la convention qu'il introduira au chapitre V à l'effet que les voyelles

27 Voir Klein, *passim*.

28 Voir une discussion sur le sens à donner à espèce, Klein, pp. 171-172.

représentent les inconnues et les consonnes les grandeurs connues. En effet, dans un problème, l'inconnue est la grandeur qui sera élevée à diverses puissances alors que les grandeurs données se voient attribuées chacune une dimension par les conditions du problème et ne sont pas multipliés par elles-mêmes.

Le vocabulaire employé par Vaulézard, proche de celui de Viète, mérite d'être noté. Ainsi, il traduit la phrase de Viète *Quare nota* ***copulæ*** *seu* ***adjunctionis*** *commode addentur; &* ***aggregatæ*** *erunt A plus B* (...) par *La note de* ***copulation*** *ou* ***adjonction****, et leur* **aggregé** *ou* **somme** *sera A, plus B* (...) (les caractères gras sont de nous). Le mot *somme* n'a pas de correspondant dans le texte latin. Toutefois, *summa* apparaît ailleurs dans le chapitre (van Schooten, p. 8). Plus loin, Viète fait référence au terme grec υπαξις utilisé par Diophante, que Vaulézard (p. 33) traduit par ***existence*** et Smith (p. 332) par ***presence***. L'on voit bien la distinction entre l'action, copulation ou adjonction, et le résultat de cette action, agrégé ou somme. Les deux termes d'action ne sont pas sans rappeler pour les didacticiens deux sens différents de l'addition: copulation impliquant la réunion alors que adjonction indique plutôt un ajout.

Vaulézard (p. 32) donne des explication supplémentaires sur l'addition d'expressions complexes comme $Aq - 2Dp$ et $Bq + 3Dp$ qui donne $Aq + Bq + Dp$.

Soustraire une grandeur d'une grandeur

Viète note la soustraction par *A moins B* ou *A - B*. Contrairement à ce qu'il avait fait pour l'addition, Viète considère ici la soustraction de grandeur *affectée*, c'est-à-dire d'une grandeur dont on a soustrait ou additionné une autre (voir la section précédente pour le sens de *puissance affectée*). De fait il se doit de le faire car dans les deux cas A - (B + D) = A - B - D et A - (B - D) = A - B + D il ne peut éviter d'aborder, pour la première fois, la **règle des signes**. Pour le second cas, son explication est claire: *because in the substraction of the whole magnitude B that which is subtracted exceeds by the magnitude D what was to have been subtracted* (Smith, p. 332). Dans ses commentaires Vaulézard donnent des exemples de soustractions de grandeurs plus complexes telles que la soustraction de $B - 2D$ de $A - 3D$.[29] La nécessité que dans une soustraction la première grandeur soit plus grande que la seconde présente éventuellement des difficultés lorsque les valeurs des grandeurs ne sont pas déterminées. Aussi Viète introduit-il un symbole == (en fait un = allongé) qu'il appelle le ***moins d'incertitude*** (***minus incerto***) et qui tient lieu de valeur absolue de la différence des grandeurs qui encadrent le symbole ==. Il l'utilisera dans les *Cinq livres des Zététiques* (Livre I, zététiques 4 et suivants). C'est lors de son utilisation que Vaulézard sent le besoin d'ajouter au texte de Viète une preuve par le

[29] Dans ses commentaires, plusieurs erreurs de signe ou sur la valeur des coefficients se sont glissées.

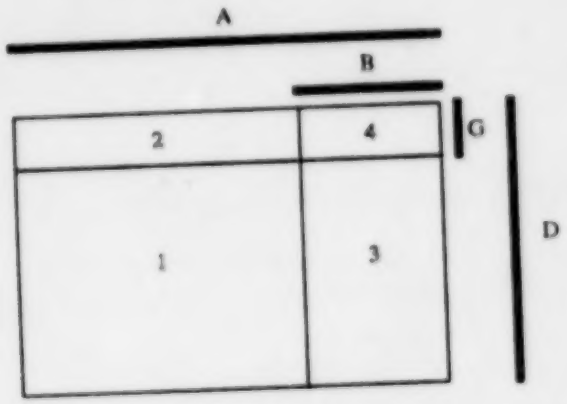
La terminologie relative à la soustraction est aussi digne de mention. Ainsi, Vaulézard (p. 33) traduit la phrase de Viète *Quare nota* ***disjunctionis seu multæ*** *commode minoris a majore fiet* ***subductio***, *&* ***disjunctæ eruni*** *A minus B* (...) par *c'est pourquoy la* ***soustraction*** *sera commodément faite par la note de* ***disjonction***, *ou de* ***privation***, *et la* ***soustraction*** *sera A moins B* (...). Vaulézard ne respecte pas totalement le contenu du texte. On remarque que le terme ***disjonctio*** est traduit par deux termes différents selon qu'il représente l'action, *disjonction*, ou le résultat de cette action, *soustraction*. Par ailleurs, le terme ***soustraction*** correspond à deux mots latins: *disjonctionis* et *subductio*. Le verbe ***subducere*** signifie *soustraire*. Le terme ***multæ***, traduit par *privation*, signifie amende. Smith (p. 331) le traduit *removal*. Vaulézard (p. 33) traduit l'expression *adfectionem multæ* par ***affection d'oster***. Par ailleurs le terme grec λειψις employé par Diophante est traduit par ***defection*** Vaulézard (p. 33) et par ***defect*** Smith (p. 332). Le résultat de la soustraction est appelé 1) ***subductio***, traduit par ***soustraction***, ou 2) ***residua*** (van Schooten, pp.5 et 8) traduit par ***reste*** (Vaulézard, pp.33 et 43) ou 3) ***differentia*** (van Schooten, p. 5) traduit par ***différence*** (Vaulézard, p. 33), dans ce dernier cas pour le moins d'incertitude seulement.

Multiplier une grandeur par une grandeur

La multiplication de deux grandeurs sera désignée par les termes *en* (*in*) ou *soubs* (*sub*) comme dans *A en B* ou dans *soubs A et B*. L'on peut multiplier des grandeurs de genres différents. Viète donne une liste permettant de connaître le genre du produit de deux grandeurs, scalaires ou de comparaison, quels que soient leurs genres. Plus délicate est la question du produit de deux expressions complexes. Pour satisfaire tous les cas possibles il doit alors énoncer la **règle des signes**. La description de cette règle telle que faite par Viète laisse à désirer. Viète énonce d'abord la règle que nous noterions aujourd'hui $a(b + c + d + \dots) = ab + ac + ad + \dots$, faisant référence à la proposition 1 du livre II des *Eléments* d'Euclide. Dans la phrase suivante, il énonce une règle en termes de produit du *nom affirmant* (*adfirmatum nomen*) par un *nom affirmant* ou par un *nom nié* (*negatum nomen*) des grandeurs, autrement dit une règle relative au produit des signes des grandeurs multipliées. Dans ce langage, il dit ce que nous exprimerions par «+ par + donne + » et «+ par - donne - ». Il ne donne pas de justification. Mais on se rappellera qu'il a déjà énoncé et justifié cette règle, sous une forme légèrement différente, lorsqu'il a discuté de la soustraction. De cette règle découle, selon Viète, *que par la multiplication de deux noms niés l'un pour l'autre est faict un affirmé* (Vaulézard, p. 36), autrement dit «- par - donne + ». Viète se justifie par une remarque de nature similaire à celle faite pour justifier que A - (B - D) = A - B + D. Le raisonnement de Viète n'est pas alors très clair. Voici la traduction anglaise de Smith (p. 333) (dont nous ne reproduirons pas les ajouts explicatifs):

From which precept it also follows that by the multiplication of negative names by each other a positive product is produced, as when "A−−B" is multiplied by "D−−G", since the product of the positive A and the negative G is negative, which means that too much is removed or taken away, inasmuch as A is, inaccurately, brought forward as a magnitude to be multiplied, and since, similarly, the product of the negative B and the positive D is negative, which again means that too much is removed, inasmuch as D is, inaccurately, brought forward as a magnitude to be multiplied. Therefore, by way of compensation, when the negative B is multiplied by the negative G, the product is positive.

Ce qui semble particulièrement obscur dans ce texte sont les deux propositions *which (again) means that too much is removed or taken away, inasmuch as A* (et *D*) *is, inaccurately, brought forward as a magnitude to be multiplied*. Nous tenterons une interprétation en nous basant sur la figure suivante: [30]



Le produit de A - B par D - G donne nécessairement une expression ayant quatre termes. Par les lois des signes énoncées dans le paragraphe précédent, l'on sait que du terme AD sera retranché les termes BD et DG. Reste à déterminer le signe du terme BG. Or dans la figure le rectangle AD est composé de quatre rectangles 1, 2, 3 et 4, le rectangle 1 étant (A - B)(D - G) et le rectangle 4 étant BG. On a que le rectangle 1 égale AD - 2 - 3 - 4. Le rectangle 2 n'est toutefois pas AG mais AG - BG. Donc si l'on n'enlève que AG, *too much is removed or taken away, inasmuch as A is, inaccurately, brought forward as a magnitude to be multiplied*. Il aurait fallu plutôt multiplier par A - G serait-on tenter d'ajouter. Il faut donc ajouter BG après avoir enlevé AG. De même pour le rectangle 3, il faut ajouter BG après avoir enlevé DB. Donc pour trouver 1 à partir de AD il faut enlever

30 Vaulézard donne à la suite du texte de Viète une figure semblable avec des explications . Vaulézard pp. 36-37.

AG, puis ajouter BG, puis enlever DB, puis ajouter BG et enfin enlever BG. Ainsi le signe de BG ne peut être que + provenant de deux fois l'ajout de BG puis de son retrait, ce qui équivaut à l'ajout d'une fois BG.

La terminologie de la multiplication n'est pas aussi variée que pour les deux premières opérations. L'expression latine pour ***multiplier*** est ***ducere .. in***. Vaulézard emploie les mots ***produit*** et ***multiplication***. En latin, le résultat de la multiplication est parfois dit ***effecta*** (van Schooten, p. 8).

Au début de cette cinquième section, nous avons mentionné la distinction rendue nécessaire par la loi des homogène entre la multiplication comme produit de deux grandeurs et la multiplication comme addition répétée. Cette distinction se manifeste dans le texte de Viète mais est en partie perdue dans les réédition de van Schooten et Vaulézard. Dans la toute première édition des *Zeteticorum libri quinque*, zététique I-1, Viète emploie l'expression *A bis* alors que van Schooten l'écrit *A 2* dans son édition du même livre et Vaulézard *2A*. Il semble donc que Viète fut plus sensible que ses commentateurs à la différence entre la multiplication comme addition répétée et la multiplication entre deux grandeurs.

Appliquer ou diviser une grandeur par une grandeur

La division de deux grandeurs, la première d'un genre supérieur à la seconde, disons B plan et A, est écrite au long *B plan appliqué à A longueur*[31] ce qui s'écrit plus concisément:

$$\frac{B\ planum}{A}.$$

Comme pour la multiplication, Viète donne une liste permettant de déterminer le genre d'un quotient, connaissant les genres des grandeurs qui sont divisées l'une par l'autre. Il entreprend ensuite de donner les règles de manipulation du symbolisme de la division. Ces règles reposent toutes selon lui sur ce que nous exprimerions aujourd'hui par

$$\frac{xy}{y} = x. \qquad (*)$$

---

[31] Notons qu'ici Viète ajoute un qualificatif (*longueur*, *longitudino*) pour indiquer qu'il s'agit d'une grandeur du premier genre. (Voir les remarques faites à propos du chapitre III de l'*Introduction à l'art analytique* sur le fait que, dans l'échelle des genres de scalaires, Viète n'avait pas donnée de qualificatif pour ceux d'ordre 1).

Cette règle s'applique quels que soient les genres de x et y. Il énonce alors quelques règles par des exemples. Elles correspondent aux règles de manipulation des fractions. Les voici énoncées en langage moderne (Viète ne les numérote pas):[32]

Pour l'addition:

1. $\frac{x}{y} + z = \frac{x + zy}{y}$ [33]

2. $\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{xw + zy}{yw}$

Pour la soustraction:

3. $\frac{x}{y} - z = \frac{x - zy}{y}$

4. $\frac{x}{y} - \frac{z}{w} = \frac{xw - zy}{yw}$

Pour la multiplication:

5. $\frac{x}{y} \times y = x$

6. $\frac{x}{y} \times z = \frac{xz}{y}$

7. $\frac{x}{y} \times \frac{z}{w} = \frac{x}{yw} \times z$

Pour la division:

8. $\frac{\frac{x}{y}}{z} = \frac{x}{yz}$ [34]

9. $\frac{xy}{\frac{z}{w}} = \frac{xyw}{z}$

10. $\frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{w}} = \frac{xw}{yz}$

---

32 Dans les exemples donnés, il y a une certaine incohérence dans l'usage habituel du nom des genres. Ainsi, Viète écrit *A planum*, alors qu'il aurait dû écrire A quadratum. Par ailleurs, il écrit *Zquadratum* alors qu'il aurait dû écrire Z planum. Toutefois, comme nous l'avons remarqué à la section 4, rien n'indique que l'échelle scalaire soit nécessairement issue d'une inconnue représentée, selon la convention de Viète, par une voyelle.

33 De fait van Schooten n'écrit pas le numérateur *Aplanum + Z in B* sur une seule ligne mais bien sur deux lignes, les termes l'un en dessous de l'autre, comme dans la division suivante:

$$\frac{\begin{matrix}Aplanum\\ +\,Z\,in\,B\end{matrix}}{B}.$$

Il en va de même pour les règles 2, 3, 4. Remarquons par ailleurs que Vaulézard (p. 43) écrit plutôt

$$\frac{ZB}{B} + \frac{Ap}{B} \quad \text{ou} \quad \frac{ZB + Ap}{B}.$$

34 La partie de gauche de l'identité n'est pas exprimée symboliquement mais plutôt en mots: *In adplicationibus. Oporteat* $\frac{A\,Cubum}{B}$ *adplicare ad D*. Il en va de même pour les règles 9 et 10.

Les règles 1 à 7 et 10 sont données sans justification, si ce n'est tout juste avant la règle 1 un *itaque* (c'est pourquoi) qui laisse entendre que ces règles découlent de la règle générale (•). Pour les règles 8, 9, Viète indique en plus le facteur par lequel il faut multiplier le numérateur et le dénominateur du terme de gauche pour obtenir celui de droite. Le peu d'explication de ces règles laisse par ailleurs penser que la manipulation des fractions notées comme le fait Viète était bien connue à cette époque. Notons que Vaulézard indique dans ses commentaires comment diviser deux polynômes.

Quoique le terme quotient soit utilisé par Vaulézard, il ne semble pas l'être dans le texte latin où l'on trouve le mot ***ortiva*** (van Schooten, p. 8). Pour diviser, Viète emploie le verbe ***adplicare...ad*** qui signifie appliquée, suivant en cela l'usage du temps, qui remonte aux Grecs.[35] Le mot ***divisionis*** est aussi employé, source du mot ***division*** employé par Vaulézard.

§6. Les lois du Zététique (chap. V)

6.1 Impressions et commentaires principaux lors de la séance de lecture

Ce chapitre, malgré son importance maintenant évidente, n'a pas été lu en groupe. Seuls quelques membres du groupe y ont jeté un coup d'oeil lors de la discussion sur le sens à donner aux trois parties de l'analytique.

6.2 Examen du chapitre V: *Des loix du Zetetique*

Ce chapitre comprend 14 lois et 3 propositions. Alors que le chapitre IV contenait des règles de manipulation du symbolisme, le chapitre V décrit pas à pas ce que l'on doit faire pour arriver, à l'aide des règles de la Logistique spécifique, à reformuler un problème sous une forme standardisée. Le terme loi paraît donc faire référence à des actions à poser dans un certain ordre, ces actions étant sujettes à l'utilisation des préceptes de la Logistique spécifique.

Les trois premières lois indiquent qu'il faut d'abord déterminer le genre de l'inconnue en tenant compte de la nature de ce qui est cherché: *If it is a "length" that is sought, (...) let the unknown which is being sought be a "side"* (loi 1)[36] (Smith, p. 334).

---

[35] Voir van der Waerden, B.L., pp. 118 à 123.

[36] Les propositions 2 et 3 prennent la même forme mais ont rapport au cas plan et au cas solide.

Une fois l'inconnue et son genre déterminés, il faut, selon la loi 4, mettre en relation (*adsimilantor* et *comparantor*) les différentes grandeurs contenues dans le problème au moyen des quatre opérations. Viète y dit que de façon manifeste l'on arrivera finalement à une égalité entre d'une part l'inconnue ou sa puissance et, d'autre part, une expression formée de la somme et la différence de monômes contenant ou non l'inconnue. Autrement dit, l'on devrait arriver à une expression qui aujourd'hui s'écrirait $x = D$, où D est une expression constituée uniquement de grandeurs connues ou bien:

$$x^n = F(x),$$

où n est le degré maximal de l'inconnue (x^n est donc la *puissance* dans la terminologie de Viète) et F(x) est un polynôme de degré inférieur à n en x, contenant éventuellement un terme constitué uniquement de grandeurs connues.[37] Ainsi, pour donner un exemple qui n'est pas dans Viète, x^n pourrait être x^4 et F(x) pourrait être en symbolisme moderne $ax^3 - adcx + ac^2b + db^2x - d^4 + cx^3$.

La loi 5 précise la convention à suivre pour distinguer facilement les grandeurs connues des grandeurs inconnues. Les premières seront représentées par des voyelles majuscules, les secondes par des consonnes majuscules. Dès lors, il sera possible d'appliquer *l'art* à la résolution de ces problèmes.

Selon la loi 6, les produits composés entièrement de grandeurs connues seront additionnés ou soustraits les uns des autres, toujours selon les conditions du problème et *assemblés en un tout*.[38] L'expression obtenue sera dite ***homogène de comparaison ou contenu sous la grandeur ou mesure donnée***. Viète ajoute que cette expression formera une première partie de l'équation. Dans notre exemple, l'*homogène sous la grandeur donnée* sera $ac^2b - d^4$.

On fera de même pour les produits contenant l'inconnue à une certaine puissance (puissance au sens moderne) et une ou des grandeurs connues. Alors l'expression finale obtenue sera dite ***homogène d'affection ou contenu sous le***[39] ***degré***. Telle est la

---

37 L'interprétation donnée ici peut être contestée. Nous donnons à *idque* le sens de «et celui-ci», le celui-ci étant le *aliquid*, c'est-à-dire ce qui est égal à x ou x^n.

38 Smith dit *merge into one product*, en latin: *in unum factum coalescant*. Est-ce vraiment un produit ou un tout ? Pour la loi 6, puisqu'il s'agit de monômes n'ayant pas nécessairement de facteur commun, il vaudrait mieux parler de tout. Pour la loi 7, puisque le *degré parodique* est commun à tous les monômes, l'on peut parler de produit.

39 Remarquons le singulier employé, soulignant le fait que chaque terme d'un *homogène sous le degré* contient l'inconnue à un même degré .

loi 7. Dans notre exemple, il y a deux homogènes sous le degré: $ax^3 + cx^3$ et $db^2x - adcx$.[40]

La loi 8 précise que l'autre partie de l'équation sera formée de la puissance et de tous les *homogènes sous les degrés* (c'est nous qui soulignons). Dans notre exemple, la seconde partie de l'équation sera donc $ax^3 + cx^3 + db^2x - adcx$ auquel sera joint x^4. Plus généralement, il s'agit d'obtenir une équations de la forme:

$$x^n + G(x) = C,$$

où C est l'*homogène de comparaison* et G(x), l'*homogène d'affection*, est un polynôme sans terme composé uniquement de grandeurs connues.[41]

La loi 9 traite du cas où l'*homogène sous la mesure donnée soit meslé avec l'homogène sous le degré* (Vaulézard, p. 48), autrement dit si d'un côté de l'égalité des termes ne contenant pas l'inconnue sont mélangés avec ceux le contenant. Pour se ramener à l'équation canonique telle que décrite par les propositions 6 et 8, il faut utiliser l'***antithèse*** qui est le passage d'un terme d'un côté de l'équation à l'autre en en changeant le signe, que ce terme contienne ou non l'inconnue. Il énonce alors la ***proposition I***: à savoir que l'équation n'est pas modifiée par l'***antithèse***, ce qu'il ***démontre*** sur l'exemple *A quadratum minus D plano æquari G quadrato minus B in A* (A^2 - Dplan = G^2 -BA).[42] Vaulézard (p. 49) fait référence[43] au symbole 3 du chapitre 2 qui dit que *Si à choses égales sont adjouter choses égales, les tous sont égaux*.

La loi 10 traite du cas où tous les termes contiennent l'inconnue à un certain degré, rendant de la sorte impossible par la seule antithèse l'obtention d'une équation contenant d'un côté un *homogène de comparaison*. Il faut alors diviser tous les monômes par le facteur commun à tous les termes, facteur contenant l'inconnue à une certaine puissance. Cette opération se nomme ***hypobibasme***. La ***proposition II*** soutient que l'équation n'est pas modifiée par l'***hypobibasme***. Cette proposition est démontrée sur le cas *A cubus, plus B in A quadratum; equari Z plano in A* ($A^3 + BA^2 = ZA$, où Z est plan) avec

40 Vaulézard y mettrait aussi x^4 et même tout sauf les termes constants. Voir son exemple pages 47 et 48. L'interprétation de Vaulézard nous semble un contresens.

41 Il y a une différence dans les formes d'équations correspondant respectivement aux lois 4 et 8. Viète n'indique pas les modalités de passage de l'une à l'autre. Ces modalités sont sûrement celles discutées plus loin, dans les lois 9, 10 et 11, pour justifier le passage à la forme d'équation décrite dans la loi 12.

42 Remarquons ici encore que Viète parle de G carré alors que G est une consonne. Smith (p. 343 note 36) interprète cette équation comme $x^2 - d = y^2 - bx$. La grandeur y est-elle pour lui une inconnue ? Selon l'interprétation que nous avons donnée à la section 4, cela n'est pas nécessaire.

43 Cette référence est écrite en italique dans le livre de Vaulézard et devrait donc être de Viète. En fait, elle ne se trouve pas dans l'édition de van Schooten.

une argumentation qui renvoie au chapitre II, implicitement chez Viète, explicitement chez Vaulézard.

La loi 11 vise à éliminer le coefficient, qui peut être de dimension supérieure à un, du terme de plus haut degré par rapport à l'inconnue, autrement dit à rendre le coefficient de la *puissance* égale à un en divisant l'équation par ce coefficient. Cette opération se nomme ***parabolisme***. La ***proposition III*** soutient que l'équation n'est pas modifiée par le parabolisme. La démonstration n'est pas plus explicite que pour la proposition II. Notons toutefois que Viète ne dit mot du cas où ce que nous appellons aujourd'hui le coefficient proviendrait d'une addition répétée autrement dit lorsque le coefficient est un *nombre nombrans*.

Par l'usage de ces trois opérations sur les équations, il est toujours possible de se ramener à l'équation canonique décrite par les lois 6 et 8. De fait, Viète exige un peu plus en l'attachant à une proportion. En effet, la loi 12 dit d'une équation qu'elle est ***ordonata*** (**ordonnée**) si elle peut se ramener à une proportion dont le produit des extrêmes correspond au côté de l'équation contenant l'inconnue (puissance ou puissance affectée) et le produit des moyens à l'*homogène de comparaison*. Par ailleurs une **proportion** est dite **ordonnée** si (loi 13) elle peut se ramener à une équation ordonnée. En langage moderne, une équation ordonnée aura la forme $x^kQ(x) = CD$, où Q est un polynôme ou une grandeur, C et D sont composés uniquement de grandeurs connues de sorte que x^k: C:: D: Q(x). Il n'est pas sans intérêt de souligner que dès le premier paragraphe du chapitre VIII Viète définit <u>équation</u> comme étant une égalité ordonnée marquant la place centrale de cette équation dans son analyse. Toutefois, Viète lui-même a employé à de nombreuses reprises ce terme équation dans l'*<u>Introduction à l'art analytique</u>* bien avant de le définir.

La loi 14 affirme que lorsqu'on aboutit à une équation ordonnée ou à une proportion ordonnée, *the zetetics has performed its function* (*sua munia implevisse Zeteticen existimato*). La filiation entre le traitement des égalités et celui des proportions que le chapitre 2 avait mis en lumière prend ici selon nous une signification fondamentale. La loi des homogènes apparaît alors comme la restriction nécessaire pour que la solidité et la rigueur des fondements de la théorie des proportions débordent sur l'utilisation de la logistique spécifique pour résoudre des problèmes. Sans ce lien, l'algèbre ne risquait-elle pas de sembler une science gratuite, sans fondement ?

Le chapitre se termine par une remarque sur le mode de résolution de Diophante. On y voit que la logistique spécifique n'est pas nécessaire à la Zététique puisque Diophante tout en ayant employé les espèces (l'arithme) utilise principalement la logistique numérique. Mais cet usage rend la résolution des problèmes plus difficile que par l'usage de la

spécifique. Notons toutefois que toutes les lois du Zététique présentées dans ce chapitre font implicitement référence au logistique spécifique.[44]

§7. Puissance de l'art Analytique (chap. VIII)

7.1 Impressions et commentaires principaux lors de la séance de lecture

Ce chapitre n'a pas été lu en groupe. On a seulement relevé l'objectif ou la prétention finale: *Donner solution de tout problème* (Vaulézard, p. 66).

Il s'agit du dernier chapitre de l'*Introduction à l'art analytique*. Le recours à une virgule plutôt qu'à un « et » dans la traduction de Vaulézard met moins en évidence le caractère double du titre et du chapitre: *Aequationum notatio & Artis Epilogus* (van Schooten, p. 11); *The symbolism in equations and the epilogue to the art* (Smith, p. 347); *de la note de l'équation, epilogue de l'art Analitic* (Vaulézard, p. 54). De fait, une partie du chapitre porte sur les appellations et la nomenclature (*notatio*) tandis que la seconde porte sur la puissance de la méthode (*epilogus*). Viète n'a pas fait explicitement de division bipartite dans son texte. Il se contente de numéroter vingt-neuf énoncés. Nous ferons la césure entre le vingt-deuxième et le vingt-troisième.

7.2 Examen du chapitre VIII: *De la note de l'equation, epilogue de l'art Analytic*

Vocabulaire et nomenclature (énoncés 1-22)

Une équation, pour Viète, est une *égalité convenablement ordonnée par le zetetique* (Vaulézard, p. 54). Vaulézard précise que cette égalité est ordonnée *pour l'analogie à la différence des égalités constituées par le plasmate et syncrise, lesquels ne sont autre chose que la collation d'une équation avec une autre* (...) (ibidem) et renvoie, comme de juste, au chapitre 5, loy 12. Cette cohérence entre les chapitres est confirmée dans le deuxième énoncé, faisant de l'équation une comparaison entre la grandeur *incertaine* (nous dirions inconnue) et la *certaine ou cognue*.

---

44 La traduction de Smith du dernier paragraphe du chapitre laisse croire que Viète reproche à Diophante d'avoir volontairement caché l'usage du logistique spécifique et d'avoir présenté ses solutions en utilisant essentiellement le logistique numérique afin d'étaler *his subtility and skill* . Vaulézard prend une position plus neutre: *c'est en quoy la subtilité et ingeniosité de son* (Diophante) *esprit est grandement à admirer*. L'ambiguïté vient de l'usage du mot latin *quo* qui peut ici vouloir dire *ut eo* (afin que par là, surtout si suivi d'un comparatif, comme ici *magis*) ou *et eo* (c'est pourquoi, d'où). Klein (p.170) opte pour une traduction équivalente à celle de Smith, d'où il conclut que Viète considérait que les anciens avaient de fait caché leur analyse et que lui ne faisait que la dévoiler.

Au passage, nous venons de voir deux termes aujourd'hui désuets (*plasmate*, *syncrise*). Seul Vaulézard les emploie. Mais de nombreux autres termes ou acceptions, désuets, de Viète même et traduits par Smith également, seront rencontrés dans les énoncés 3 à 22. Nous parlerons de certains d'entre eux plus explicitement lorsque nous les rencontrerons. Pour le moment, signalons-en l'abondance: *soustraction directe* (énoncé 6); *soustraction indirecte* (7); *subgraduel, homogène d'affection, degré parodique* (8, déjà vus au chapitre III); *épanaphore* (10); *degré réciproque* (11); *puissances d'un moyen simple, puissances d'un moyen multiplice* (15); *équation simple absolue* (18); *équation simple climatique* (19); etc. Certaines de ces expressions n'étaient justifiées que par l'exigence d'homogénéité. Par exemple, le ***degré réciproque*** de a dans $x^5 + ax^3$ est deux puisque le polynôme est de degré cinq, x^3 est de degré trois et ax^3 est forcément de degré cinq par homogénéité; il s'agit d'un exemple choisi par nous, van Schooten en fait un relativement au cube, c'est-à-dire, pour nous, à une équation du troisième degré. D'autres expressions tiennent au refus (ou à l'inexistence) des grandeurs négatives ou, à tout le moins, à l'ordre d'opération: ***soustraction directe*** pour $x^3 - (gx^2 + hx^2)$ et ***soustraction indirecte*** pour $(gx^2 + hx^2) - x^3$, les exemples sont de Smith. D'autres, encore, relèvent d'une classification des équations, opportune peut-être compte tenu des moyens techniques de l'époque, trop peu éclairante pour avoir été entièrement conservée (ou remplacée) jusqu'à nos jours:

(18) ***Équation simple absolue***: $x = a$ (Smith), *A fait à B + D* (Vaulézard)

(19) ***Équation simple climatique*** (ou *ladderwise* (Smith)):
$x^3 = a$ (Smith), *AC estant egal à BC + DBQ* (Vaulézard)

(20) ***Équation polinome***:
$x^3 + ax^2 - bx = c$ (Smith), *AQ + BA estant egal à BQ* (Vaulézard).

Cette remarque sur la caducité de certains vocables ou acceptions faite, reprenons systématiquement la revue des énoncés. Au troisième énoncé, Vaulézard traduit justement: *La grandeur incertaine est racine ou puissance* (Vaulézard, p. 54) c'est-à-dire que l'inconnue est du premier degré ou de degré plus élevé (selon la nature du problème, tel qu'expliqué aux numéros 1, 2, 3 du chapitre V sur les lois du Zététique). En s'appuyant sur des éléments du chapitre III et du chapitre V, on trouve une même continuité (parfois soulignée par Vaulézard, mais non par Viète) dans les énoncés suivants: la puissance est pure ou affectée (4); l'affection est par *affirmation ou négation* (5), c'est-à-dire par addition ou soustraction; la négation est directe (6) ou indirecte (7), comme nous l'avons vu plus haut; *le subgraduel mesure l'homogène d'affection par un degré parodique* (8; Vaulézard, p. 55), c'est-à-dire dans *AC + BQA egal à BC* l'homogène d'affection BQA est de degré trois, le subgraduel BQ de A est de degré deux puisque A est de degré un; il faut disposer les termes dans l'ordre de degrés et donner les coefficients (9).

L'énoncé dix pose que la racine (=inconnue) est le premier degré parodique et un nouveau terme *Epanaphoræ* (van Schooten, p. 17) est introduit. Vaulézard l'identifie au premier degré, c'est-à-dire à l'inconnue, tandis que Smith s'en sert pour désigner le degré immédiatement inférieur au degré le plus élevé. La compréhension de Smith nous semble celle qui doit être retenue, pour quatre raisons:

(1) L'énoncé de Viète comprend trois courtes phrases. *Epanaphoræ* apparaît dans la troisième et est lié au degré inférieur de un à la *puissance*, ce degré étant dit *extremus* dans la deuxième phrase, tandis que la racine (*primus gradus*) apparaît dans la première phrase: *Primus ad potestatem parodicus gradus est radix de qua queritur. Extremus, is qui uno scalæ gradu inferior est potestate. Solet autem is voce Epanaphoræ exaudiri*" (van Schooten, p. 11).

(2) Il n'y a aucun avantage à introduire un autre terme pour désigner la racine.

(3) Van Schooten donne des exemples d'*epanaphoræ* et Smith les retient dans sa traduction: *"square" is the epanaphora of "cube", "cube" of "squared-square" and so on (...)* (Smith, p. 348).

(4) Dans la résolution des équations, il est souvent utile de faire une transformation ou un changement de variable de façon à faire disparaître le terme de degré inférieur de un au degré de l'équation polynomiale. C'est ce que mentionne Viète en page 7 de son *De Numerosa Potestatum ad Exegesim Resolutione*, sans cependant s'y servir du terme *Epanaphore*. Nous n'avons pas poussé plus loin la recherche des usages du terme Epanaphore.

L'énoncé 11 porte sur la notion de **degré réciproque**, vue plus haut. Les énoncés 12, 13 et 14 donnent l'ordre de progression des degrés selon que l'inconnue est de degré un (la progression est alors la même que celle de l'échelle des degrés scalaires: 1, 2, 3...), de degré deux (la progression est 2, 4, 6...), de degré trois (la progression est 3, 6, 9...). Nous dirions aujourd'hui que si $y = x^2$ (par exemple) alors $y^2 = x^4$, $y^3 = x^6$, etc. Viète (ainsi que ses deux traducteurs) emploie une terminologie qui semble déroger en partie aux prescriptions du chapitre III; en fait, il emploie une double terminologie, par exemple si l'inconnue est de deuxième degré, la progression des degrés est:

Quadratum: *Planum*
Quadrato - quadratum *Plani Quadratum*
Cubo - cubus *Seu* *Plani cubus*
& eo deinceps ordine

(Viète p. 17)

Pour le degré 6, *cubo-cubus* correspond à la logique d'addition des exposants ou de produit des termes tandis que son nouveau correspondant *Plani Cubus* correspond à la multiplication des exposants ou à la composition des opérations (*cube of the plane*, dit Smith, p. 349). Les distinctions et oppositions de dénominations faites par Vaulézard dans le chapitre III (pp. 26-27) ne sont donc pas univoquement réglées dans l'*Introduction à l'art analytique* de Viète. Il n'y a, bien sûr, pas d'illogisme ou d'incohérence dans cette terminologie de Viète. La logique de résolution des équations, et même la mise en équations,se prêtent à la considération du *cube d'une grandeur plane*, etc. Il n'en reste pas moins que le traducteur Vaulézard semble avoir, dans le chapitre III, durci le choix qu'il nous disait que Viète y avait fait.

Ce que nous écririons x^2, x^4, x^8, x^{16},... est dit ***puissance d'un moyen simple***, les *autres d'un* ***moyen multiplice*** (énoncé 15). Le contexte ne permet guère d'apprécier la justification ou l'usage de cette terminologie. Van Schooten note que les exposants progressent dans un rapport géométrique *subduplam* dans le cas des puissances dites de moyens simples et Vaulézard note que la *racine quarrée* peut en être extraite, c'est-à-dire qu'il y a *la puissance d'un seul moyen tombant entre deux grandeurs* (Vaulézard, p. 58), ce qui nous paraît être utile surtout si l'équation est simple au sens de l'énoncé 19 (et donc de forme $x^{2n} = a$).

L'énoncé 16 porte sur la réitération (voir le chapitre V) du terme homogène de comparaison pour la grandeur certaine ou connue et l'énoncé 17 constate que, lorsqu'il s'agit de nombres, autrement dit lorsque l'homogène de comparaison est un nombre, les homogènes de comparaison sont des unités. Les énoncés 18, 19 et 20 introduisent les termes (que nous avons vus plus haut) d'***équation simple absolue*** ($x = a$), ***simple climatique*** ($x^n = a$) ou ***polinome*** (x^n + [certains termes en x à une puissance inférieure à n multipliés par les coefficients appropriés] = a). Une classification des équations et des proportions (ou *analogies*) qu'elles renferment implicitement peut être faite, selon les énoncés 21 et 22, d'après la nomenclature précédente et aussi d'après la présence ou l'absence dans l'équation de chacun des degrés possibles de l'inconnue inférieurs à la *puissance* (c'est-à-dire au degré supérieur).

Ces vingt-deux énoncés consistent donc essentiellement en une présentation de termes, en des rappels implicites et en des essais de classification. Il y a là relativement peu de substance, et la terminologie est maintenant, pour l'essentiel, désuète.

Outils de l'exégétique et puissance de l'art Analytique (énoncés 23-29)

Après avoir trouvé l'équation, c'est-à-dire l'égalité bien ordonnée, il reste une étape à franchir, du moins si l'on désire trouver et exhiber la solution d'un problème particulier: c'est la résolution, permettant d'arriver à l'inconnue à partir des grandeurs dites certaines ou connues. À ce propos, Viète attribue à l'art analytique une grande puissance et certaines de ses affirmations ont une allure de proclamation.

Pour l'exégétique en nombre, il faut, bien sûr, connaître les quatre opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication, division). C'est ce que rappelle l'énoncé 23, qui va cependant beaucoup plus loin: *L'art enseigne la résolution des puissances, soient pures ou affectées, lesquelles ni les anciens ni les modernes n'ont cogneue* (Vaulézard, p. 61). La remarque sur l'ignorance des autres auteurs porte sur la résolution des puissances affectées (disons $x^4 + 2x^3 = 17$ et non $x^4 = 17$), comme en fait foi l'ordre des termes chez Viète [(...) *sive purarum sive (quod nesciverunt veteres atque novi) adfectarum* (...) (van Schooten, p. 12)]. Mais capitale reste cette affirmation quant à la capacité de résolution numérique des équations. Dans sa note 58, Smith (p. 351) identifie le *De numerosa potestatum...* dont nous avons déjà parlé, comme remplissant cette partie du programme de Viète. J. Borowczyk présente un résumé de ce traité en page couverture arrière de la réédition latine et de la traduction française publiées par l'IREM de Poitiers:

> *François Viète (1540-1603) expose comment déterminer chiffre par chiffre des solutions approchées d'équations algébriques en commençant par cinq exemples de puissances pures (extraction de racines jusqu'à l'ordre six) puis en traitant 32 exemples de puissances affectées (équations polynomiales de degré inférieur ou égal à six); sa méthode utilise les développements binomiaux des Notæ Priores et en suit au plus près la méthode d'extraction des racines de même degré. La procédure d'approximation influencera de nombreux chercheurs de son temps.*

Le *De Numerosa...* permet donc (et amplement) de répondre à la question de certains membres du groupe de lecture relativement aux procédés employés à l'époque de Viète pour l'extraction de racines cubiques (pures).

Pour les *choses géométriques* (Vaulézard, p. 61), il faut distinguer selon les degrés (Viète dirait «puissances»). Pour le 1er et le 2e degrés, *costé et quarré* (Vaulézard, p. 61), Viète affirme avoir des procédés plus réguliers ou standards (*magis canonicas*) (énoncé 24). C'est, dit Smith dans sa note 59, le programme du *Effectionum Geometricarum Canonica Recensio* (*Opera Mathematica*, pp. 229 ss.). Quant aux cubes et quarrés - quarrés (nos 3e et 4e degrés), l'énoncé 25 s'en charge à l'aide d'un postulat que nous présentons dans la version de Vaulézard: *Il est possible de quelque point donné mener une ligne droite, de laquelle le segment compris entre deux autres lignes donnees soit donné* (Vaulézard, p. 62). Viète affirme que, à partir de ce postulat, on peut résoudre les fameux problèmes du mésographe, de la trisection de l'angle, du côté de l'heptagone (régulier) et de bien d'autres impliquant des cubes et des solides, des quarrés-quarrés et des plans-plans. Smith, toujours attentif à guider ses lecteurs, mentionne que c'est là le programme de l'ouvrage de Viète, *Supplementum Geometriae* (*Opera Mathematica*, pp. 240 ss.) et donne, dans cette même note 60 (Smith, p. 352), une définition du problème du mésographe: (...) *finding two mean proportionals to two given straight lines, and its solution immediately yields the solution of the problem of doubling the cube*. Vaulézard semble victime d'un contre-sens et traduit: *Le problème mésographic, comprenant la section de l'angle en trois parties egales, l'invention du costé de l'heptagone, et autres* (...) (Vaulézard, p. 62). Deux autres nuances ou oppositions de sens apparaissent entre les deux traducteurs: (i) Cette concession ou ce postulat est, selon Viète, *αιτημα και δυσμηχανον* ce que Smith traduit *a postulate not difficult to fulfil* (Smith, p. 352) tandis que, pour Vaulézard, *elle est seulement αιτημα demande et δυσμηχανον de difficile invention, laquelle jusqu'à présent a esté dite αλογα sans raison* (Vaulézard, p. 62); (ii) ce postulat résoud les pro' èmes *artificiellement* pour Vaulézard, *skilfully* (c'est-à-dire habilement, adroitement) pour Smith. Viète employait, encore une fois, un terme grec: εντεχνως. Quoi qu'il en soit de ces fins détails, l'importance du postulat est mise en évidence dans les trois versions et son efficacité affirmée pour la résolution de fameux et difficiles problèmes. Vaulézard, lui, saute sur l'occasion pour présenter une démonstration (à l'aide de ce postulat) de la trisection de l'angle en parts égales (Vaulézard, pp. 62-64). Il n'identifie pas l'auteur ou la source de sa démonstration. Notons qu'aucune condition n'est imposée: le point peut-il être sur une des lignes? les lignes peuvent-elles être parallèles? etc. Le contexte vastement programmatique de l'ouvrage peut être un élément explicatif du caractère très général et peu précautionneux de l'énoncé du postulat 25.

L'énoncé 26 semble affirmer que l'on n'a pas à dépasser les rapports triples ou quadruples pour les problèmes concrets, sauf peut-être dans la recherche des angles à partir des côtés (ou réciproquement). Cette limitation correspond à ne pas dépasser le degré 4. Vaulézard considère avoir *démontré facilement* qu'il n'y a pas plus de trois genres de grandeurs car *à un mesme point ne peuvent estre menées plus de 3 lignes*

perpendiculaires, sçavoir longueur, largeur et profondité (...) (Vaulézard, p. 65). Notre univers physique est tridimensionnel (selon le sens commun de toujours, et selon la science de l'époque de Viète et de Vaulézard). Il faut quand même prendre note de l'ouverture de Viète à la considération d'équations de degré supérieur pour traiter certains problèmes. L'énoncé 27 conclut à la solution (jusqu'alors inconnue de tous, selon Viète) de la division des angles, et ce, par l'analyse, qui enseigne aussi comment:

> *Étant donné la raison des angles, donner la raison des côtés. Faire comme nombre à nombre, ainsi l'angle à l'angle* (Vaulézard, p. 66)

L'énoncé 28 exclut la possibilité de comparer des lignes droites à des courbes (et l'on sait que Descartes considérait encore comme suspecte, voire impossible, la rectification de certains courbes, c'est-à-dire leur mesure linéaire ou leur comparaison avec des lignes droites). La raison invoquée pour cette impossibilité est que *an angle is something in between a straight line and a plane figure. Thus the law of homogeneity seems to oppose it* (Smith, pp. 352-353), c'est-à-dire la loi d'homogénéité s'opposerait à la comparaison (directe, dirions-nous) des droites et des courbes. Le lien ne semble pas évident entre la nature des angles, d'une part, et l'impossibilité de comparer droites et courbes, d'autre part. Vaulézard explique que l'angle est plus qu'une droite, mais moins qu'une superficie, car il est compris entre deux droites, mais cet espace n'est pas fermé du troisième côté.[45] Nous illustrerions ainsi:

Puis Vaulézard établit le lien cherché (dans le cas du cercle seulement, notons-le): *Il s'ensuit aussi, que la ligne circulaire estant la mesure de l'angle, qu'elle sera incommunicable à la droite* (ibidem). L'explication nous paraît rester incomplète d'autant plus que le même Vaulézard avait affirmé (dans sa traduction et non dans l'ajout dont nous venons de lire un extrait) que *la loy des homogènes est venue répugner aux deux problèmes precedens* (ibidem) c'est-à-dire aux deux problèmes dont Viète, au contraire, proclamait la solution dans l'énoncé 27. Les difficultés des concepts d'angles et de courbes se sentent dans ces flottements sémantiques, et l'on sait qu'il ne s'agit pas que d'une lenteur historique, le problème étant aussi mathématique et épistémologique. Un lecteur de groupe avait déjà noté, au moment de la lecture du chapitre III ou du chapitre IV, le statut spécial des angles, statut non mentionné dans le texte: on ne sait comment multiplier les

[45] Le fait d'avoir placé les angles entre les grandeurs de genre *longueur* et ceux de genre plan explique peut-être le fait que Viète n'associe pas, comme nous le faisons, un nombre à chaque genre de grandeur de comparaison. S'il l'avait fait, un angle aurait-il été une grandeur de degré 3/2?

angles entre eux, etc. Pour en revenir à l'énoncé 28, le caractère non catégorique de cet énoncé se manifeste par l'emploi de *videtur* (Viète, p. 12) traduit par *seems* (Smith, p. 353) comme verbe dans la phrase *The law of homogeneity seems to oppose it* (Smith, p. 353).

L'énoncé final, le numéro 29, proclame en majuscules l'objectif grandiose de l'art analytique, qui est:

> *NULLUM NON PROBLEMA SOLVERE* (Van Schooten, p. 12)
> *DONNER SOLUTION DE TOUT PROBLÊME* (Vaulézard, p. 66)
> *TO LEAVE NO PROBLEM UNSOLVED* (Smith, p. 353)

La méthode et les outils (élaborés dans les autres ouvrages identifiés par Smith) de l'art analytique justifiaient certes une certaine exubérance, que la suite des événements devait, bien sûr, tempérer. Mais quel bel objectif! Même sous une forme atténuée, il constitue une justification pour l'enseignement de l'algèbre dans les écoles ainsi qu'une incitation à la réflexion et à l'action didactiques et pédagogiques car, pour reprendre les mots de Vaulézard dans son *Advertissement au lecteur*: (...) *plusieurs ignorans viennent souvent à mepriser cete divine partie des Mathématiques, pour n'entendre le sens et les termes d'iceluy* (Vaulézard, p. 11).

Chapitre 4
Considérations générales

§1. La vie des textes

Les textes de Viète parlent aux lecteurs, commentateurs ou traducteurs. Ceux-ci en retour les questionnent, tentent de les expliquer, y font des ajouts qui se veulent des clarifications. On ne se baigne jamais deux fois dans la même eau et toute sonate est toujours neuve, à certains égards. Dans le cas que nous examinons, à savoir quelques pages de Viète, non seulement les perceptions évoluent mais chacun intervient et laisse trace de sa lecture.

La mouvance des textes apparaît dès la présentation de l'édition van Schooten (1646) que nous avions cru, un temps, simple collection et réimpression des versions originales. La langue, ici le latin, n'est pas un critère d'authenticité. Van Schooten, en effet, ajoute des commentaires ou explications au texte de Viète. Une étude détaillée des variantes et des ajouts ne fait pas partie de nos intentions actuelles. Pour une bonne part, les contributions de van Schooten à ... *Isagoge* apparaissent en italiques dans l'édition de 1646 et dans la traduction de Smith (voir la note 1, Smith, p. 315).[1] Donnons deux exemples d'intervention de van Schooten. Dans le chapitre II, van Schooten justifie les énoncés 11 et 12 par les argumentations mathématiques, avec des références historiques (à Apollonius, Pappus, Euclide). Il procède ainsi passim tout au long de l'*Introduction à l'art analytique*. Deuxième exemple: pour permettre au lecteur de mieux apprécier la différence entre la logistique numérique et la logistique spécifique, van Schooten suggère de lire Diophante et Viète de façon conjointe et dresse une liste de correspondance de problèmes traités par ces deux auteurs (dans les *Livres arithmétiques* de Diophante, et dans les *Cinq livres des Zététiques* de Viète respectivement) (van Schooten, p. 4) Le texte même de Viète est parfois modifié comme nous l'avons souligné à la section 5 de notre chapitre 3 (p.42).

Vaulézard (1630) est encore plus interventionniste. Dans l'*Introduction à l'art analytique*, il traduit parfois un peu librement, ajoute des commentaires un peu partout, présente une notation personnelle (Vaulézard, pp. 24-27) quoique employée par Viète dans d'autres ouvrages, donne des exemples supplémentaires pour la compréhension et le bon usage de la logistique spécifique (Vaulézard, pp. 31-35), présente une démonstration de l'identité (A-B) (D-G) = AD-BD-AG+BG (Vaulézard, p. 36) et une démonstration de la trisection de l'angle en parts égales à l'aide du postulat de Viète (Vaulézard, pp. 62-63).

1 Cependant, on trouve des exceptions à cette répartition. Par exemple, l'énoncé 27 (Smith p. 352) est d'un seul tenant et devrait appartenir intégralement à Viète.

etc. Sa traduction des *Cinq livres des Zététiques* a les mêmes caractéristiques, sans doute motivées par un souci didactique. Il commente, illustre (ses *Exégétiques en lignes*), corrige des erreurs numériques, etc. Il s'agit donc d'un texte Viète-Vaulézard, les différences dans les caractères d'imprimerie et la disposition du texte ne suffisant pas à toujours identifier la part de chacun, d'autant plus que la réédition moderne des traductions de Vaulézard semble avoir donné lieu à une dactylographie ou composition matérielle nouvelle et que l'appareil de critique des textes en est presque absent.

J. Winfree Smith (1955) est le plus scrupuleux dans sa traduction de l'*Introduction à l'art analytique*. Il semble suivre le texte édité par van Schooten de façon fidèle presque partout. Il ajoute à l'occasion des formes alternatives, plus modernes, en les mettant d'ordinaire entre crochets. Un exemple, parmi plusieurs: *Products under the several segments are equal to the product under the whole [i.e., ab+ac=a(b+c)]* (Smith, p. 323). En notes en bas de pages, Smith explicite, commente ou, chose très utile pour le lecteur moderne, renvoie à d'autres textes de Viète, non mentionnés par ce dernier dans l'*Introduction à l'art analytique*, et qui accomplissent un programme ou réalisent une prétention très concisément émise (voir en particulier les notes 58-59-60 de Smith, pp. 351-2). Le texte de Smith conserve une dimension raisonnable (Vaulézard délaie, ajoute, etc.) par rapport au texte original, l'essentiel de ses contributions apparaissant en bas de pages.

Nous nous sommes aussi servis de la traduction des *Cinq livres des Zététiques* par J. Grisard (1968). Ce fut d'ailleurs le choix premier des auteurs du présent rapport. La modernité de la langue de Grisard nous semblait un atout dans le contexte d'une lecture en groupe par des lecteurs, intéressés certes, mais non spécialistes de l'histoire. D'entrée de jeu, Grisard explique son choix des termes, moins géométriques que chez Viète ou Vaulézard: *grandeur* pour *latus* (Grisard, note 1, p. 195), *quotient* pour *rapport* (Grisard, note 1, p. 196), etc. Il doit aussi procéder à des ajustements, le signe =, par exemple, signifiant pour lui et pour nous l'égalité, Grisard emploie = pour le *minus incerto* de Viète, c'est-à-dire pour la valeur absolue de la différence (Grisard, p. 199). Des coquilles nouvelles apparaissent, comme c'est toujours le cas dans une traduction ou même une copie. Par exemple, il faut intervertir D et B dans la troisième ligne à partir du bas de la page 207, etc. Grisard repère certaines erreurs et fait des commentaires [*le style d'expression de Viète se modifie en avançant dans le livre: il est ici plus dépouillé, et se contente de renvoyer brièvement au travail déjà fait* (...), dit-il à propos du zététique III-2 (Grisard, note 1, p. 231)]. Il ne surcharge pas le texte de ses interventions mais la visée globale de sa traduction en modifie l'imagerie et la saveur.[2]

[2] Nous recommanderions aujourd'hui au lecteur bilingue anglais-français d'aborder l'*Introduction à l'art analytique* dans la traduction anglaise de Smith, et les *Cinq livres des Zététiques* dans la traduction française de Vaulézard. Toutes les versions ont, bien sûr, leurs qualités et leur utilité, mais les deux que nous retenons nous semblent l'emporter quant au rapport qualité-prix (ici: information-effort).

§1. La vie des textes

En séances de lecture, les membres du groupe interrogent, interprètent, font des incursions brèves dans d'autres parties du texte, s'essaient à la résolution de certains problèmes, etc. Il est resté peu de traces authentifiables de ce travail. Les règles du jeu étant la spontanéité, l'échange entre participants et l'immersion dans le texte en un premier contact aventureux et cordial, ce n'était certes pas le moment ni l'occasion propice pour des commentaires ou analyses écrits. De plus, on n'avait pas prévu un système d'enregistrement ou de notation du déroulement des séances; chacun des deux rédacteurs prit des notes un peu au petit bonheur de l'inspiration. Un fait est certain: la lecture des textes de Viète suscita de nombreuses questions quant au symbolisme, aux intentions, aux connaissances, etc. Le texte brut ne se suffisait pas, ne nous suffisait pas.

Les deux auteurs du présent rapport ont pris, eux aussi, leurs libertés à l'égard des textes lus. Ils complétèrent une lecture intégrale de l'*Introduction à l'art analytique* (dans les trois versions notées van Schooten, Vaulézard, Smith). Ils firent quelques recherches, en aval et en amont de l'époque de Viète (et parfois au coeur même de l'époque de Viète). Ils risquent des interprétations, etc. Par exemple, l'un d'entre eux parle de Ghetaldi et de Descartes à propos du chapitre de Viète sur la loi d'homogénéité (voir nos pages chapitre 3, section 4, pp. 32-33) ou essaie d'évaluer la pertinence de la lecture de ces pages de Viète par des écoliers ou des collégiens, etc. (nos pages chapitre 4, section 3, pp. 64-65). L'autre creuse toujours davantage la signification des concepts d'analyse et de synthèse ainsi que celle des trois parties de l'analyse selon Viète, il remonte à Théon, à Pappus, etc. (nos pages chapitre 3, section 2, pp. 18 à 26) et il fait de même pour les lois du Zététique, procédant autant par généralisation que par une micro-observation d'ambiguité dans les traductions du passage de Viète relatif à Diophante (nos pages chapitre 3, section 6, pp. 44 à 48).

Les textes de Viète génèrent donc une lecture dynamique. Il ne s'agit pas, pour nous, de soutenir une thèse d'absolue subjectivité, mais de rendre compte de l'existence de variations stylistiques, didactiques et même conceptuelles dans les versions consultées. Ne peut échapper à un essai d'élucidation et d'appropriation quiconque vise à comprendre, à situer et, peut-être, à se servir de ces textes dans un contexte de travail sur l'histoire ou, ce qui restait notre toile de fond, dans un contexte de réflexion, voire d'intervention, didactique. Le présent rapport est un élément dans cette entreprise encore en cours d'élargissement et d'approfondissement.

§2. Importance historique et originalité de Viète

La présente section, comme les autres d'ailleurs, ne prétend ni faire le point ni avancer de nouvelles idées ni offrir des données inédites à la communauté des historiens des mathématiques. Il s'agit plutôt, toujours dans la même perspective épistémologico-didactique, de prendre note des propos de Viète dans les textes lus en groupe ou dans les parties adjacentes de ces textes, de relever les principales réactions des membres du groupe et de les prolonger par une investigation et une rédaction propres aux deux auteurs du présent texte. Rien de définitif ni d'exhaustif ni de vraiment inédit, donc, mais une attention particulière aux échanges au niveau de l'interface modernes-anciens, nous-Viète.

Les historiens réservent presque tous[3] au moins une mention pour Viète dans le développement de l'algèbre. On en fait même *Le père des mathématiques modernes* (titre du chapitre VIII de *Mathématiques et mathématiciens* de Pierre Dedron et Jean Itard). Une reconnaissance du mérite et de l'originalité de Viète lui était déjà acquise chez certains de ses contemporains. Dans sa préface du 15 février 1600 à l'édition du *De Numerosa*..., Ghetaldi affirme: *Dans ce traité, vous verrez ce qu'on n'a jamais pu voir dans les siècles passés, malgré les tentatives faites jusqu'à ce jour par un grand nombre d'auteurs et des plus excellents.*[4] Ghetaldi annonce que *l'on verra la véritable perfection de l'Algèbre, et aussi de l'Astronomie* (ibidem) si certaines autres oeuvres de Viète sont publiées. En 1630, Vaulézard regrettait l'oubli croissant dans lequel tombaient les oeuvres de Viète, faute de diffusion, et se proposait d'y remédier par sa traduction de ce qu'il appelait *La nouvelle algèbre de M. Viète*. Il voit en Viète *celui de qui les Mathématiques tiennent la gloire qu'elles possedent* (Vaulézard, p. 9).

Les membres du groupe d'étude en histoire des mathématiques n'ont pas eu en mains ces citations de la littérature secondaire. Ils ont abordé Viète dans le texte (en traduction), d'abord dans les *Cinq livres des Zététiques* (où il n'y a pas d'affirmation d'originalité par Viète) puis dans l'*Introduction à l'art analytique*. C'est dans cet ouvrage que l'on a trouvé des prétentions novatrices de Viète. Nous les systématisons en trois catégories.

a) Invention d'une troisième espèce d'analyse, dite exégétique ou rhétique, et contributions à cette partie de l'analyse

Dès le premier chapitre de l'*Introduction à l'art analytique*, Viète affirme: *J'en ai toutefois constitué une troisième espèce convenable à icelles; laquelle sera dite ρητικη η εξηγητικη* (Vaulézard, p. 13). Nous renvoyons le lecteur à notre discussion des termes de

[3] Ce ne semble pas le cas de *Mathématiques au fil des âges*, Dhombres, J. et al. (ed.).

[4] Traduction de J. Borowczyk, dernière page de l'édition publiée par l'IREM-Poitiers, mai 1989.

l'analyse chez Viète et certains Anciens (nos pages chapitre 3, section 2, pp. 24-25). Quoi qu'il en soit du statut épistémologique ou didactique de l'Exégétique, nous pouvons constater que Viète prétend y apporter également des contributions pratiques, en termes de calculs de solutions approchées ou en termes de constructions géométriques. C'est dans son dernier chapitre, plus particulièrement par les énoncés 23, 24 et 25, qu'il met en évidence ses contributions (les notes de Smith, notes 58, 59 et 60, pp. 351-2, donnent les titres des ouvrages de Viète relatifs aux propos très concis des énoncés 23, 24 et 25). Le lecteur intéressé trouvera plus de détails et quelques commentaires sur ces outils de l'Exégétique dans nos pages chapitre 3, section 7, pp. 53 à 55. Il suffira ici d'admirer que Viète ne se soit pas contenté de prétentions programmatiques mais qu'il se soit appliqué à en permettre, dans une large mesure, la réalisation effective par des méthodes de calculs ou de constructions.

b) La logistique spécifique, ou: le calcul algébrique

Toujours dans le même court premier chapitre, Viète ajoute un deuxième élément vu comme novateur par rapport aux travaux et méthodes des Anciens, sans se l'attribuer nommément. Il s'agit, dirions-nous aujourd'hui, de passer de l'arithmétique à l'algèbre dans les calculs (l'expression «calcul algébrique» est nôtre): (...) *non pas en exerçant sa Logique par les nombres qui est cause du peu de fruit que l'on tire des Analytiques des anciens; mais bien par le Logistique soubs des especes nouvellement trouvees, lequel est beaucoup plus heureux et excellent pour comparer les grandeurs que le numerique* (...) (Vaulézard, p. 14). Dans sa note *g*, Vaulézard va jusqu'à dire, à propos des Anciens, que *de ces Algèbres ne peut estre nul Théorème ny solution generale* (...) (Vaulézard, p. 15).

Le chapitre IV de l'*Introduction à l'art analytique* définit ce qu'est la logistique spécifique ou spécieuse: *Logistice numerosa est quae per numeros, Speciosa quae per species seu rerum formas exhibetur, ut pote per Alphabetica elementa* (van Schooten, p. 4).[5] Van Schooten compare les méthodes de Diophante et de Viète et en suggère même une lecture couplée, en donnant un tableau de correspondance entre les numéros de 24 problèmes des *Livres arithmétiques* de Diophante et les numéros des problèmes analogues dans les *Cinq livres des Zététiques* de Viète (van Schooten, p. 4; Smith, pp. 329-330).

Un troisième passage porte sur la même distinction par rapport aux travaux arithmétiques (comprendre: à portée non générale) des Anciens, en particulier de Diophante. À la fin du chapitre V sur les lois du Zététique, Viète admire la subtilité du

5 *Le logistique Numerique est celuy qui est exhibé et traité par les nombres, le Spécifique par especes ou formes des choses: comme par les lettres de l'Alphabet.* (Vaulézard, p. 30)

travail zététique de Diophante, d'autant plus que celui-ci n'en fait la présentation détaillée que sous la forme arithmétique, alors que le raisonnement algébrique (*reckoning by species*) (Smith, p. 345) rend les résultats plus faciles et donc moins émerveillants. Il n'est pas clair si Viète reproche à Diophante d'avoir volontairement caché l'utilisation qu'il aurait faite d'outils de la *Logistique spécifique* ou s'il constate simplement qu'il en est résulté un accroissement de réputation d'habileté pour Diophante (voir chapitre 3, section 6, p. 48, note 44).

Tant le texte de Viète que les commentaires de Vaulézard (1630) et de van Schooten (1646) établissent une prétention à une plus grande généralité que les Anciens, sans identifier précisément la contribution personnelle de Viète (on sait l'importance des contributions italiennes à la résolution des équations du troisième et du quatrième degrés au XVI[e] siècle; on sait aussi la prolifération, à cette époque, de notations symboliques, pour divers usages (comme le signe d'égalité), mais sans systématisation et sans adoption universelle).

ε) La loi d'homogénéité

Viète énonce dès le début du chapitre III *la premiere et perpetuelle Loy* (Vaulézard p. 22) de l'homogénéité qui est que *Les homogènes soient comparés aux homogènes* (ibidem). Il note en passant que *La cause de l'obscurité des Analytiques des anciens, est qu'ils n'ont aucunement pris garde à ces genres, et n'ont entendu ces choses* (Vaulézard, p. 24). C'est là un reproche majeur à propos d'une loi déclarée si éminente. Nous en avons déjà parlé (voir chapitre 3, section 4, pp. 31 à 33 et 36). Mais il faut remarquer, en outre, qu'entre les deux dernières citations se glisse, entre autres, une référence à Adraste pour justifier la loi d'homogénéité. Or Adraste se référait, selon Klein, au livre V des *Éléments* d'Euclide, en particulier à la définition 3: *A ratio is a sort of relation in respect of size between two magnitudes of the same kind.*[6] Les définitions 4, 5, 6 et 7 d'Euclide permettent d'opérationnaliser l'égalité et l'inégalité de rapports, même si la définition 3 du concept de rapport reste vague et mériterait peut-être le terme de «pseudo-définition» que lui accole Jean Dieudonné.[7] Klein hésite sur la compréhension à privilégier quant à cette référence de Viète à Adraste.[8] Minimalement, nous devons retenir que les rapports se font chez Euclide entre des homogènes; les proportions peuvent y être des égalités de deux rapports, l'un entre deux longueurs (disons) et l'autre entre deux surfaces ou deux solides.

---

6 Heath T.L., vol. 2, p. 114.

7 Dieudonné, Jean, p. 78.

8 Voir Klein, p. 173 et les notes 253 et 254 à la p. 276.

Klein fait l'hypothèse dans sa note 254 que Viète aurait à l'esprit une interprétation à l'aide des proportions, convertibles en équations entre homogènes, ce que nous nous permettons d'illustrer par un exemple fictif. L'équation (ou proportion pour dire plus justement) de type

$$(1)\ \frac{\text{Polynôme du } 2^{e} \text{ degré}}{\text{Polynôme du } 2^{e} \text{ degré}} : \frac{\text{Polynôme du } 3^{e} \text{ degré}}{\text{Polynôme du } 3^{e} \text{ degré}}$$

donne, en multipliant entre eux les extrêmes et entre eux les moyens, l'équation de type

(2) Polynôme du 5^{e} degré = Polynôme du 5^{e} degré.

La nouveauté de Viète serait-elle donc l'interprétation finale en équations entre termes de même genre (nous dirions: de même dimension ou degré)? Une ambiguité certaine nous reste, tout comme le regret de ne pas trouver chez Viète de références précises ou d'exemples de l'usage (qu'il condamnait chez les Anciens) de comparaison entre des grandeurs non-homogènes.

Les détails qui précèdent sont, bien sûr, postérieurs à la lecture faite en groupe et celle-ci fut, pour plusieurs personnes, une occasion d'étonnement devant l'exigence d'homogénéité ainsi que la nomenclature des degrés ou échelons des scalaires et celle des genres des grandeurs comparées. Voilà certes qui est nouveau pour un moderne d'aujourd'hui non habitué aux textes anciens. On constate aussi une originalité certaine de Viète quant à ce qui était passé pour lui (mais une originalité non finement fixée) et quant au futur que nous sommes pour lui (et c'est la réaction naïve du lecteur, professeur ou étudiant, qui sert d'indicateur, sinon de mesure).

Me. ins le contexte particulier et assez limité qui fut le nôtre, force est donc de conclure que ces textes de Viète ne sont choses négligeables ni historiquement, ni mathématiquement parlant.

§3. Pertinence pédagogique et didactique de la lecture des textes de Viète

Il n'y a pas de voie royale ni de méthode canonique pour l'utilisation de textes historiques dans l'enseignement des mathématiques.[9] Il en est de même pour l'utilisation de textes historiques dans la formation à l'enseignement des mathématiques. De façon spécifique, que pouvons-nous dire des textes particuliers de Viète lus en groupe et présentés ou analysés dans les pages précédentes?

Nonobstant l'originalité et l'importance historique de Viète dans le développement de l'algèbre, il nous apparaît assez nettement qu'une grande prudence s'impose dans le recours à l'*Introduction à l'art analytique* ou aux *Cinq livres des Zététiques* à des fins d'enseignement ou de formation. L'*Introduction ...* est un texte programmatique capital, mais qui recèle des difficultés conceptuelles, linguistiques, méthodologiques, culturelles et historiques nombreuses et fortes. Nous ne voyons pas comment on pourrait s'en servir substantiellement dans un premier enseignement de l'algèbre au niveau des **écoles secondaires**, ni même au **niveau collégial**. Les explications requises pour permettre un accommodement avec les perspectives et les méthodes de Viète seraient, croyons-nous, démesurées par rapport au gain conceptuel éventuel et pourraient facilement s'avérer contre-productives. Peut-être l'intention maîtresse de Viète, le fameux *Donner solution de tout problème* (Vaulézard, p. 66), pourrait-il servir à situer l'algèbre dans l'économie des moyens intellectuels, en particulier mathématiques, que s'est donnés l'humanité. Même cela est peut-être trop abstrait. Certains zététiques, parmi les plus élémentaires, sont accessibles à un jeune esprit ouvert et curieux, mais le langage risque de rebuter la plupart des écoliers ou collégiens, peu familiers qu'ils sont avec l'interprétation géométrique des opérations arithmétiques usuelles et avec une pensée basée sur l'usage des proportions. En guise de comparaison, Diophante leur apparaîtrait plus actuel.

Une partie de ces textes de Viète pourrait être utilisée dans des cours de **premier cycle universitaire**, en mathématiques, en histoire des mathématiques, ou en didactique des mathématiques. Là, ce sont l'intention pédagogique et le temps disponible qui commanderont le choix des textes et le type d'usage que l'on en fera. On ne peut faire vite,

---

[9] Par exemple, Victor J. Katz, à propos du Kristiansend History of Mathematics Summer Workshop, tenu du 7 au 13 août 1988, disait: (...) *no firm agreement on exactly how best to use history in teaching* (*Newsletter* no 17, International Study Group on the Relations Between HISTORY and PEDAGOGY of MATHEMATICS, hiver 1989, p. 4). John Fauvel disait à propos de la British Conference on the Uses of history in Mathematics Teaching, tenue à Leicester du 1er au 3 septembre 1988: (...) *the relations between the history and teaching of mathematics* (...) *are so complex and have so many aspects that participants in the conference were by no means agreed.* (ibidem, p. 6). On trouvera de nombreux exemples d'utilisation de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement dans l'ouvrage suivant: *Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques*, *Bulletin Inter-IREM Epistémologie*, s.d., 334 pages. On y trouve une classification des expériences qui y sont discutées en trois types: démarche pédagogique, activité interdisciplinaire, projet d'action éducative.

car il faut d'abord que l'étudiant puisse être saisi par l'étrangeté des textes, qu'il essaie d'y débusquer un sens, sans que les explications ou les mises en ordre du professeur ne viennent trop rapidement faire les liens qu'une interrogation un peu soutenue peut seule établir de façon potentiellement féconde. L'illustration de certains propos quant à l'évolution de l'algèbre peut certes se faire par le recours à des passages choisis. Si l'on désire cependant une réelle appropriation par l'étudiant, il convient de concentrer son attention sur un nombre relativement faible de pages. Enfin, certains étudiants pourraient faire porter sur des textes de Viète les travaux qu'ils ont à réaliser dans certains cours et pour lesquels ils ont une liberté de choix. Quelques-uns iraient ainsi au-delà de la simple référence nominale ou d'une lecture rapide, vite oubliée dans le fil des événements, scolaires et autres.

Quant aux **professeurs** de mathématiques ou de didactique des mathématiques dans les universités, il va de soi, en principe, que toute lecture des ouvrages originaux des grands maîtres accroît leur connaissance de l'histoire et de la discipline intellectuelle. Mais compte tenu des tâches nombreuses qui sont les leurs et du caractère secondaire (voire marginal) du développement historique des mathématiques à leurs yeux et dans leur vie professionnelle réelle, Viète est-il pertinent? Nous le croyons, sans aller jusqu'à le dire nécessaire. En fait, c'est la qualité des échanges, c'est le choc de la nouveauté qu'est le passé, c'est l'effort de comparaison qui priment (à moins d'avoir affaire à des historiens professionnels de la mathématique, ce qui n'est pas la situation vécue par le groupe ni le cas envisagé ici). Et puisque l'algèbre est enseignée de nos jours dans le niveau d'études secondaires, avec des difficultés, incompréhensions et abandons fréquents, une immersion, même brève, dans d'anciens textes algébriques peut apporter certaines informations, susciter des questions, inspirer des stratégies didactiques. À ce titre, l'*Introduction à l'art analytique* est particulièrement révélateur de certaines intentions dominantes de l'entreprise algébrique (et le renvoi à d'autres textes de Viète montre que ses techniques, de résolution numérique entre autres, essayaient de suivre et d'épauler ses visées programmatiques). Quant aux *Cinq livres des Zététiques*, c'est, pour ainsi dire, l'art analytique à l'oeuvre, du moins dans ce que Viète appelle l'un de ses trois offices ou aspects. Le mathématicien (en chacun de nous) peut s'y sentir plus à l'aise, résoudre à sa manière les problèmes de Viète, comparer les méthodes, etc. Il y a moins de concepts généraux, de classifications pour nous caduques, etc., dans les *Cinq livres des Zététiques* que dans l'*Introduction à l'art analytique*. Un bon dosage des textes, avec (au besoin) un appareillage de mise en situation et d'explications, permettrait sans doute à de nombreuses personnes une lecture de Viète à la fois historiquement authentique, non indûment rebutante et didactiquement stimulante. Cela constituerait une généralisation et une amélioration de ce que fut l'expérience du groupe d'étude en histoire des mathématiques lors des six rencontres consacrées à Viète.

Chapitre 5
Conclusions générales

§1. Sur les séances de lecture : apprendre en lisant ... mais surtout apprendre à lire

Se réunir à quelques-uns. Discuter à brûle-pourpoint sur un texte dont nous venons tout juste de prendre connaissance. Introduire parmi nous l'auteur, à part égale, savourer sa verve, pointer ses imprécisions, le pousser dans un coin pour lui faire dire ce qu'il n'a pas dit et pour savoir s'il aurait aimé le dire... Voilà notre exercice collectif. Intimistes, ces rencontres le sont aussi bien au niveau de l'atmosphère sociale que de la démarche intellectuelle. Personne n'a chaussé ses bottes de sept lieux pour traverser l'oeuvre d'une seule foulée. Bien au contraire. La moindre vétille nous arrête. L'on trébuche aisément et presque volontairement. Que l'auteur fasse une allusion, aussitôt l'un de nous vérifie son interprétation auprès des autres qui, bien sûr, vont avoir lu différemment le passage. Le tour est joué, la discussion s'engage à nouveau.

Pour l'historien, de telles rencontres permettent de mettre à l'épreuve les interprétations des textes lus telles qu'on les trouve dans les ouvrages généraux d'histoire des mathématiques ou dans la littérature secondaire. Nos collègues mathématiciens ou didacticiens, à l'esprit souvent plus vierge que celui de l'historien, interpréteront parfois à la lettre le texte. Si nous pensons différemment, le recours à un historien connu peut peut-être ébranler le trouble-fête, mais le poids de la tradition ne saurait à lui seul faire pencher la balance dans un sens plutôt qu'un autre. L'historien n'a donc qu'à bien se tenir. En effet, en voulant aller au fond du sens du texte, les nuances deviennent importantes et l'interprétation de chacun aide à les mettre en évidence. L'historien en retire un bénéfice certain.

Pour le didacticien, les lectures le mettent directement en contact avec une forme d'expression mathématique vraiment différente de ce qu'il rencontre habituellement. Mieux que dans les livres d'histoire des mathématiques qui camouflent souvent la réalité de la forme dans laquelle s'exprimait un mathématicien, le texte se révèle dans toutes ses différences et ses originalités. La présence d'historiens permet d'obtenir à l'occasion des informations sur le contexte général dans lequel ce texte prend racine. Des questions techniques plus pointues trouvent aussi parfois réponse. La lecture s'en trouve à certains égards facilitée. La connaissance du sujet s'en trouve enrichie pour le didacticien, mais aussi sa perception de ce qu'en dit l'histoire «officielle» se nuance. Les attentes du didacticien à l'égard de l'histoire se nuancent et deviennent à la fois plus précises, moins

globales et aussi moins inspirées par des questions du type «Qui le premier a ... »

Nous avons tenu à marquer explicitement les résultats de nos discussions faites en groupe aussi bien en ce qui a trait à la lecture d'extraits des *Cinq livres des Zététiques* (Chap. 2, section 2) que de l'*Introduction à l'art analytique* (Chap. 3, la première partie de la plupart des sections). Nous y sommes revenus dans le chapitre 4, section 1.

§2. Sur le travail à deux: Le programme de François Viète

L'objectif que nous nous étions fixé en commençant la rédaction du présent rapport était de rentabiliser l'effort collectif des membres du groupe d'étude en continuant là où il s'était arrêté. Ainsi, par un travail de lecture nourri des commentaires faits au cours des rencontres du groupe, nous espérions présenter une interprétation plus fine des deux livres de Viète abordés. Bien vite, nous nous sommes rendus compte de la nécessité de préciser le cadre et les intentions du programme même que Viète décrit dans son *Introduction à l'art analytique* afin de mettre en perspective le travail de Viète dans ses *Cinq livres des Zététiques* et dans ses autres oeuvres. Ainsi s'explique la place prépondérante du chapitre 3 du présent rapport. Pour ce faire, nous avons dû confirmer, compléter et aussi parfois rectifier les interprétations issues de la lecture collective.

Nous croyons avoir réussi à préciser le sens de chacune des trois analytiques de Viète, les raisons de l'importance de la loi des homogènes, le rôle à la fois central et à la fois accessoire de la logistique spécifique dans la réalisation du Zététique. Après notre lecture critique, la structure même de l'*Introduction à l'art analytique* apparaît rationnelle, les chapitres s'appelant l'un l'autre dans une succession qui n'a rien d'aléatoire. Le lecteur en jugera.

§3. Sur la suite de ce travail

Cette mise en évidence du programme de Viète laisse toutefois d'importantes questions sans réponse. Il y a d'abord la place effective de l'analyse comme méthode propre à la résolution de problèmes. Cette présence de l'analyse comme outil était apparue dès Pappus, mais dans un cadre géométrique. Quand et comment l'analyse a-t-elle été reconnue explicitement comme un élément constituant de l'algèbre reste pour nous une question ouverte. Les sources secondaires consultées par nous jusqu'ici ne font aucune référence à une présence consciente de l'analyse dans les oeuvres de Diophante et des algébristes arabes. Il en va de même des abacistes italiens de la fin du Moyen-Age. La

question nous semble de première importance, ne serait-ce que par le fait qu'une référence à l'algèbre comme méthode analytique implique l'établissement d'un pont entre celui qui fait cette référence et la pensée grecque. Il dénote aussi une prise de conscience des fondements de la nature du raisonnement algébrique. Cette prise de conscience n'était-elle pas un préalable à l'énonciation de toutes les règles de l'algèbre comme Viète le fait dans son petit livre ? Elle donne de plus une profondeur théorique à ce que Viète lui-même perçoit comme une innovation, la logistique spécifique. D'ailleurs, l'on peut se demander si ce que décrit Viète dans son *Introduction à l'art analytique* correspond bien à l'emploi qu'il en fera dans la résolution des problèmes. Seule une étude d'autres oeuvres de Viète comme des *Cinq livres des Zététiques* et du *Ad Logisticen Speciosam Notæ priores* peut apporter une réponse.

Une autre question reste en suspens. Nous avons noté l'importance de la théorie des proportions dans la légitimation de l'usage des équations et les conséquences, cristallisées dans la loi des homogènes, de cette dépendance. La théorie des proportions occupe aussi une grande place dans les *Cinq livres des Zététiques*. Mais, pour aller au-delà des impressions, il nous faudra étudier la place des proportions et la nature de leur utilisation dans l'ensemble de ce livre et même dans d'autres oeuvres de Viète. Cette filiation avec la théorie des proportions amène aussi à s'interroger sur les rapports de cette nouvelle algèbre avec la géométrie. Paradoxalement, ne trouve-t-on pas dans ce lien algèbre-proportion-géométrie ce qui permet de consommer le détachement de l'algèbre par rapport à la géométrie, autonomie qui permet ensuite à l'algèbre de constituer en elle-même un cadre de démonstration ? Une histoire de la nécessité à l'époque de Viète de manipuler des équations homogènes dans le travail algébrique pourrait nous éclairer sur la perception qu'ont les contemporains de Viète de l'importance de la loi des homogènes et par ricochet de l'importance de la théorie des proportions comme fondement de l'algèbre. Pour nous, cette histoire reste aussi à faire.

Enfin, un autre point n'a pas du tout été abordé dans les pages précédentes. Le très court chapitre VII de l'*Introduction à l'art analytique* consacré à l'Exégétique ne donne que peu d'informations sur l'usage concret de cette nouvelle analytique qu'introduit Viète. Le chapitre VIII offre quelques allusions qui ne se décodent vraiment qu'en référence à d'autres travaux du mathématicien poitevin.

On le voit, la lecture des douze pages que constitue le programme de Viète ne peut être un aboutissement même si elle fut faite dans trois versions différentes et si l'on a aussi consulté plusieurs commentateurs. Tout au contraire, cette lecture fait émerger de nombreuses questions. Elle met en relief le besoin de ne pas se limiter aux énoncés à caractère général de l'*Introduction à l'art analytique* et de traverser du côté de l'application de ces principes, chez Viète et chez certains de ses successeurs. Ce sera notre prochaine étape.

Bibliographie

Bornecque, H. et Cauët, F., *Le dictionaire latin-français du baccalauréat*. Paris (Eugène Belin), 1935, 1958 (3e édition).

Busard, H.L.L., Viète, François, in *Dictionary of Scientific Biography*, Gillispie, C.C. (éd), New York (Scribner), 1970, vol. XIV, pp. 18 à 25.

Dahan-Dalmedico, Amy et Jeanne Peiffer, *Une histoire des mathématiques*, Édition du Seuil, Paris, 1986 (Première édition 1982)

Descartes, R., *La Géométrie*,1634, édité et traduit en anglais par D.E. Smith et Marcia L. Latham, première édition 1925, édition Dover, 1954.

Dedron, P., Itard, J., *Mathématiques et mathématiciens*, Paris (Magnard), 1959.

Dhombres et al., *Mathématiques au fil des Ages*, Paris (Gauthier-Villars), 1987.

Dieudonné, Jean, *Pour l'honneur de l'esprit humain. Les mathématiques aujourd'hui*, rééd. collection Pluriel, Paris (Hachette), 1987.

Diophante d'Alexandrie, *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*, traduction et introduction par Paul Ver Eecke, réimpression, Paris (Albert Blanchard), 1959.

Grisard, J. , *François Viète, mathématicien de la fin du seizieme siècle*, thèse inédite, Paris (EPHE, VIe Section), 1969 (exemplaire du Centre Alexandre Koyré, th. 17).

Heath, T.L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 3 vol., New York (Dover), 1956.

HPM, International Study Group on the Relations Between HISTORY and PEDAGOGY of MATHEMATICS, *Newsletter*, no. 17, hiver 1989.

Klein, J., *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, Cambridge (Mass.) (M.I.T. Press), 1968, (paru en allemand, 1934-1936).

IREM, *Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques*. Bulletin Inter-IREM Épistémologie, s.d. [1988].

Pappus d'Alexandrie, *La collection mathématique*. 2 vol., traduction et introduction de Paul Ver Eecke, Paris, Bruges (Desclée de Brower), 1933.

Ritter,F., François Viète, Inventeur de l'algèbre moderne, 1540-1603, Essai sur sa vie et son oeuvre, *La revue occidentale philosophique, sociale et politique*, 2e série, 10 (1895), pp. 234 à 274 et 354 à 415.

van der Waerden, B.L., *Science Awakening*. New York (Oxford Un. Press), 1961.

Vaulézard, *La nouvelle Algèbre de M. Viète précédée de Introduction en l'art analytique*. Paris 1630, dans l'édition de 1986 (Paris, Fayard).

Viète, François, *In artem analyticen Isagoge*. Tours 1591. Les autres versions utilisées:
- Smith: Smith, J. Winfree (1955), reproduite dans Klein, J. (1968), pp. 315 à 353.
- Vaulézard: dans Vaulézard (1986), pp. 7 à 66.
- van Schooten: dans Viète, F. (1646), pp. 1 à 12.

Version non utilisée:
- Vasset, A., *L'algèbre nouvelle de M. Viette*. Paris, 1630.
- Introduction à l'art analytique par François Viète, traduit par M. F. Ritter, *Bullettino de bibliografia e de storia delle scienze matematiche e fisiche*, vol. 1 (1868), pp. 223 à 244.

Viète, François, *Zeteticorum libri quinque*. Paris, 1593. Les différentes versions utilisées:
- dans Viète, François (1646), pp. 42 à 81.
- dans Grisard, J. (1968), pp. 191 à 281.
- dans Vaulézard (1986), pp.67 à 267.

Viète, François, *De Numerosa Potestatum Ad Exegesim Resolutione, Et Opere Restitute Mathematicæ Analyseos seu Algebrâ Novâ*, Paris 1600, texte reproduit et traduit en français par J. Borowczyk, Poitiers (IREM de Poitiers), 1989. Aussi, en latin seulement, dans le Viète, F. (1646), pp. 163 à 228.

Viète, François, *Francisci Vietæ Opera Mathematica*, édition de F. van Schooten, 1646, réimpression avec une introduction de J.E. Hofman, New York (Georg Ohms Verlag), 1970.

Des exemplaires du présent document sont en vente à l'adresse suivante:

Centre Interdisciplinaire de Recherches sur
l'Apprentissage et le Développement en Education
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succ. A, G-3125
Montréal, Québec
H3C 3P8

Pour commander, remplir le formulaire de réquisition apparaissant à la dernière page du document.

Publié par le Centre Interdisciplinaire de Recherches sur l'Apprentissage et le Développement en Education
Université du Québec à Montréal
Conception graphique: Pierrette Pelletier